

GIOVANI SAFANELLI

**DESCRIÇÃO DA MATÉRIA
NUCLEAR EM UM CAMPO
MAGNÉTICO FORTE ATRAVÉS DA
FUNÇÃO DE WIGNER**

FLORIANÓPOLIS

2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**DESCRIÇÃO DA MATÉRIA NUCLEAR EM UM CAMPO
MAGNÉTICO FORTE ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE
WIGNER**

submetida à Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de em Física

GIOVANI SAFANELLI

Florianópolis, Junho de 2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente aos meus pais pelo amor incondicional, pela ajuda em todos os momentos e por serem os pilares fundamentais da minha vida.

Agradeço ao Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini por confiar em mim ao ter me aceitado como aluno e por ter sido um físico exemplar ao qual sempre procuro me espelhar.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a função de Wigner covariante e suas aplicações na descrição da matéria nuclear, simétrica e imersa em um campo magnético forte. Calculamos a função de Wigner no equilíbrio termodinâmico e a utilizamos para o cálculo das equações de estado do sistema. Deduzimos uma equação de transporte para a função de Wigner. Mostramos que no limite clássico e para um sistema de spin saturado esta equação se reduz a uma equação de Vlasov. Posteriormente, utilizamos a equação de Vlasov para calcular uma generalização quântica e relativística dos modos de propagação clássicos de Bernstein. Mostramos os efeitos dos níveis de Landau sobre as equações de estado e os modos de Bernstein.

Palavras-chave: função de Wigner, níveis de Landau, matéria nuclear, campo magnético forte.

Abstract

In this work we make a study of the covariant Wigner function and their applications in symmetric nuclear matter in a external and strong magnetic field. We calculate the Wigner function in thermal equilibrium and use it for calculating the system equation of state. We derive a transport equation for the Wigner function. We show that for a saturated spin system and in the classical limit this transport equation is the relativistic Vlasov equation. In the sequel, we use the Vlasov equation to calculate a quantum and relativistic generalization of the classical propagation Bernstein modes. We show the effects of Landau levels in the equation of state and the Bernstein modes.

Keywords: Wigner function, Landau levels, nuclear matter, strong magnetic field.

SUMÁRIO

Notações e Convenções	1
Introdução	7
Matéria Nuclear Densa em Campo Magnético Forte	11
2.1 Matéria Nuclear	11
2.2 Modelo $\sigma - \omega$	13
2.3 Aproximação de Campo Médio para Matéria Nuclear	21
2.3.1 Valores Esperados	25
Função de Wigner	29
3.1 Mecânica Estatística Clássica no Espaço de Fase	30
3.2 Função de Wigner Covariante	33
3.2.1 Equação de Movimento	36
3.2.2 Limite Clássico e Aproximação de Spin Saturado	39
3.3 Função de Wigner no Equilíbrio Termodinâmico	49
3.3.1 Tensor de Energia-Momento	54
3.3.2 Equação de Estado	57
Teoria da Resposta Linear	67
4.1 Modos de Bernstein na Matéria Nuclear	68
4.1.1 Sistema à Temperatura Nula e no Primeiro Nível de Landau	72
Conclusões	79
5.1 Sugestões para Pesquisas Futuras	80
Apêndice A – Equação de Dirac	81
A.1 Equação para os Nêutrons	81
A.2 Equação para os Prótons	84
Apêndice B – Trocas de Variáveis e Algumas Relações Úteis	91
B.1 Cálculo do Jacobiano $\frac{\partial(x^\mu, \Pi_{(p)}^\mu)}{\partial(x^\mu, p^\mu)}$	91
B.2 Derivadas	91
B.3 Cálculo do Comutador (3.41)	92
Apêndice C – Decomposição Espinorial da Matriz de Wigner	95

C.1	Interpretação Física no Limite Clássico	98
Apêndice D – Cálculo da Função de Wigner no Equilíbrio Termo-		
	dinâmico	101
D.1	Função de Wigner para os Nêutrons	101
D.2	Função de Wigner para os Prótons	102
Apêndice E – Cálculo da Densidade de Energia e da Pressão		
E.1	Sistema à Temperatura Zero	113

0 NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

Utilizamos os seguintes símbolos para inferência lógica :

$$\begin{aligned} \rightarrow & \quad \text{significa: introduzindo a premissa} \quad , \\ \Rightarrow & \quad \text{significa: implica em} \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Para denotar um tensor tridimensional utilizamos índices latinos, no caso especial de vetores utilizamos a notação usual ou índices latinos :

$$\vec{r} = r_i = (r_1, r_2, r_3) \quad .$$

Para denotar a base canônica do sistema de coordenadas cartesianas tridimensional usamos $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Para denotar um tensor quadrimensional utilizamos índices gregos, no caso de quadrivetores utilizamos uma letra em itálico com índices gregos :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad .$$

Para denotar a dependência de uma função ou um operador com um quadri-vetor, somente usamos uma letra em itálico ou a notação acima :

$$f(x) = f(x^\mu) = f(t, \vec{r}) \quad .$$

Utilizamos a notação de Einstein para simplificar equações envolvendo muitos índices :

$$r_i p_i \equiv \sum_{i=1}^3 r_i p_i = r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 \quad ,$$

$$x_\mu p^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu p^\mu = x_0 p^0 + x_1 p^1 + x_2 p^2 + x_3 p^3 \quad .$$

O operador nabla quadridimensional em relação à coordenada contravariante x^μ , é um quadrivetor covariante denotado por :

$$\partial_\mu^x \equiv \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad .$$

Utilizamos o acento circunflexo para denotar um operador linear definido sobre o espaço dos vetores de estado do sistema, por exemplo :

$$\hat{\psi}(\vec{r})|\Phi > \quad , \quad \hat{\Omega}|\omega > \quad ,$$

onde $|\Phi >$, $|\omega >$, são vetores de estado.

Para denotar o comutador e o anticomutador de um operador, utilizamos respectivamente:

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] \quad , \quad [\hat{H}, \hat{\rho}]_+ \quad .$$

O elemento de matriz de um operador, é denotado por :

$$< i | \hat{H} | j > = H_{ij} \quad ,$$

onde $|j\rangle$ é um vetor de estado independente de representação e $\langle i|$ é o vetor adjunto de $|i\rangle$.

Quando o índice estiver entre parêntesis, este estará se referindo a uma espécie de partícula. Por exemplo, a matriz de Wigner(definida no capítulo 3) para os prótons pode ser escrita como :

$$F_{(p)}(x, p) \quad . \quad (2)$$

O traço de uma matriz é denotado por :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)] &= \sum_{\alpha} \int d^4x \, \hat{\psi}_{\alpha}^\dagger(x) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \quad , \\ \text{Sp} [\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x)] &= \sum_{\alpha} \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \quad , \end{aligned} \quad (3)$$

onde Sp é o traço somente sobre os índices espinoriais.

Quando omitirmos os índices no produto $\hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)$, estará implícito que se trata de uma contração nos índices espinoriais :

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) = \sum_{\alpha=0}^3 \hat{\psi}_{\alpha}^\dagger(x) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \quad . \quad (4)$$

O produto exterior será denotado por :

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \otimes \hat{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_0^*(x) \hat{\psi}_0(x) & \hat{\psi}_1^*(x) \hat{\psi}_0(x) & \hat{\psi}_2^*(x) \hat{\psi}_0(x) & \hat{\psi}_3^*(x) \hat{\psi}_0(x) \\ \hat{\psi}_0^*(x) \hat{\psi}_1(x) & \hat{\psi}_1^*(x) \hat{\psi}_1(x) & \hat{\psi}_2^*(x) \hat{\psi}_1(x) & \hat{\psi}_3^*(x) \hat{\psi}_1(x) \\ \hat{\psi}_0^*(x) \hat{\psi}_2(x) & \hat{\psi}_1^*(x) \hat{\psi}_2(x) & \hat{\psi}_2^*(x) \hat{\psi}_2(x) & \hat{\psi}_3^*(x) \hat{\psi}_2(x) \\ \hat{\psi}_0^*(x) \hat{\psi}_3(x) & \hat{\psi}_1^*(x) \hat{\psi}_3(x) & \hat{\psi}_2^*(x) \hat{\psi}_3(x) & \hat{\psi}_3^*(x) \hat{\psi}_3(x) \end{bmatrix} \quad . \quad (5)$$

Neste trabalho usamos o sistema de unidades naturais, onde :

$$\hbar = c = 1 \quad .$$

Quando necessário, explicitaremos \hbar ou c . Usamos a representação de Dirac, onde γ^μ é um quadri vetor contravariante definido por:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{1}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

A matriz γ^5 é definida como :

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad (6)$$

na representação de Dirac, a matriz γ^5 fica :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (7)$$

Agora usando a convenção de Bjorken e Drell [1] para o tensor métrico do

espaço de Minkowski, o quadrivetor covariante γ_μ é dado por :

$$\begin{aligned}\gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\nu \\ g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

O conjugado de Dirac é denotado por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

1 INTRODUÇÃO

Em 1968, J. Bell e A. Hewish descobriram objetos emitindo pulsos de rádio de forma extremamente regular. Posteriormente, estes objetos conhecidos como pulsares foram identificados como sendo estrelas de nêutrons magnetizadas girando rapidamente. O pulsar mais famoso é o pulsar PSR B0531+21 localizado na nebulosa do Caranguejo e que é o remanescente de uma explosão de uma supernova observada pelos chineses em 1054. Este possui um período de rotação de 33ms, que diminui cerca de 1,3ms por século. Acredita-se que a magnitude do seu campo magnético, assim como na maioria dos pulsares em rádio, é de cerca de 10^{11}G a 10^{13}G . Em 1978, foram descobertos uma nova classe de objetos, estes emitiam um pulso de radiação gama de alta intensidade(raios gamas duros) seguido de uma sequência de pulsos de intensidade decrescente (raios gamas moles). Estes objetos são denominados de repetidores de raios gamas moles (SGR). Em 1992, R. Duncan e C. Thompson[2] propuseram que a origem destas erupções de raios gamas é uma estrela de nêutrons cuja magnitude do campo magnético excede em até mil vezes a magnitude de uma estrela de nêutrons comum e que nascem com um período de rotação menor que 10ms. Logo após o nascimento, o campo magnético atua como um freio para a rotação, fazendo com que a rotação da estrela diminua com o tempo. Através de medições do aumento do período de rotação de SGRs, as proposições de R. Duncan e C. Thompson foram confirmadas por uma equipe liderada por G. Kouveliotou[4]. Estes objetos foram denominados de magnetares por R.Duncan e C.Thompson.

Magnetares são estrelas de nêutrons com um forte campo magnético ($B > 10^{14}\text{G}$)[2] e girando rapidamente logo após seu nascimento com período de rotação inferior a 10ms. Esta magnitude de campo magnético é maior que a magnitude do campo magnético crítico para os elétrons $B_C = 4,414 \times 10^{13}\text{G}^1$. O campo magnético crítico é definido como sendo o campo onde a energia ciclotron clássica das partículas é igual a energia relativística de repouso destas partículas, ou seja, $w_c = mc^2$. Para magnitudes maiores que a magnitude do campo crítico os efeitos relativísticos se tornam importantes e não podem ser desprezados. Acredita-se que a geração dos campos magnéticos em estrelas é dada por um fenômeno conhecido como ação de dínamo. Este fenômeno consiste na conversão da energia cinética do fluido composto por partículas carregadas presente na estrela em energia magnética. Para a ação de dínamo operar globalmente em uma estrela, formando assim um campo magnético

¹O campo crítico para os prótons é de $B_C = 1,487 \times 10^{20}\text{G}$

em grande escala, é necessário que o período de rotação da estrela seja menor que o período de convecção. Estima-se [3] que para uma estrela de nêutrons recém nascida o fluido do seu interior tem um período de convecção de 10ms ou menos. Os magnetares [2] nascem com um período de rotação abaixo de 10ms podendo assim desenvolver um campo magnético em larga escala e muito forte. Por exemplo, o pulsar PSR B0531+21 é uma estrela de nêutrons que nasceu com um período de rotação de 20ms, que é mais lento do que o período de convecção de 10ms. Portanto, este pulsar desenvolve um campo magnético de uma estrela de nêutrons normal(pulsar comum) que é da ordem de mil vezes menor que o campo magnético de um magnetar. Em uma contagem feita por G. Kouveliotou [4], estima-se que 10% das estrelas de nêutrons do universo são magnetares.

A composição interna dos magnetares, bem como das estrelas de nêutrons comuns é ainda desconhecida. Modelos teóricos podem ser propostos considerando que a matéria estelar é composta por um gás degenerado de hádrons [5]. O intuito destes modelos é calcular a equação de estado para a matéria estelar em equilíbrio. Esta equação é muito importante pois permite o cálculo da massa total e do raio da estrela, que podem ser obtidos através de observações astrofísicas. Assim, pode-se ter uma confirmação experimental do modelo.

No regime onde os campos magnéticos ultrapassam em magnitude o campo crítico B_C , os processos físicos são profundamente afetados e existe a introdução de novos efeitos que não são observados fora deste regime. Magnetares são laboratórios para se testar e confirmar estes novos efeitos, tal como o predito na seção 4.1. De outro ponto de vista, o entendimento da física de campos magnéticos fortes, tal como o predito na subseção 3.3.2, é necessária para a compreensão da natureza dos magnetares.

A busca por uma equação de estado para a matéria estelar e a descrição de novos fenômenos físicos na matéria submetida a campos magnéticos fortes são nossas motivações para a realização deste trabalho.

Neste trabalho construímos um modelo teórico simples para descrição da matéria estelar. Este modelo não é realista, pois não inclui elétrons e outras partículas que existem em quantidade significativa na matéria estelar real. Mas, este servirá como base para que em trabalhos posteriores façamos uma generalização para modelos mais realistas. Usamos um modelo que consiste de matéria nuclear simétrica, interagente e imersa em um campo magnético forte ($B > 10^4\text{G}$) e homogêneo. Neste modelo os prótons e nêutrons interagem entre si via interação forte. Os prótons, além de interagir com os nêutrons, interagem com o campo magnético externo. Devido a esta interação

os prótons têm, do ponto de vista clássico, seu movimento descrito por órbitas no plano perpendicular a direção do campo magnético. A quantização deste movimento resulta em níveis discretos. Estes níveis são chamados de níveis de Landau. A interação forte é descrita com a utilização do modelo de Walecka, ou seja, consideramos apenas os campos dos mésons escalar $\hat{\sigma}$ e vetorial $\hat{\omega}$. Utilizamos a aproximação de campo médio, que consiste em trocar os operadores de campo $\hat{\sigma}$ e $\hat{\omega}$ pelos seus valores clássicos. Devido a esta aproximação, as partículas se comportam como em um plasma quântico. Ou seja, como em um gás de partículas que não colidem, que interagem através de um potencial externo e obedecem o princípio de Pauli.

A teoria dos plasmas clássicos é bem descrita através da utilização de uma função de distribuição de um corpo $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Quando desprezamos as colisões entre as partículas e consideramos que estas interagem através de um campo externo, a dinâmica da função de distribuição é dada pela equação de Vlasov (3.9). Esta equação é responsável pela predição de vários fenômenos físicos na teoria clássica, tais como o amortecimento de Landau, amortecimento ciclotron, modos normais de Bernstein, modos normais de Langmuir, modos normais de Van Álfven e outros. Estes fenômenos são amplamente confirmados através de experimentos em laboratório e em observações astrofísicas. Visando aproveitar os desenvolvimentos da teoria clássica dos plasmas, procuramos descrever o nosso sistema através de um formalismo que facilite a transição da teoria clássica para a teoria quântica. Portanto, precisamos de uma função de distribuição de um corpo que seja a extensão da função $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$ à mecânica quântica relativística. Esta função é a função de Wigner definida na equação (3.20). Com a utilização desta função podemos estabelecer a conexão entre o nosso plasma quântico e relativístico em estudo e um plasma clássico. Esta conexão fica evidente na seção 3.2.2, onde efetuamos o limite clássico sobre a equação de movimento para a função de Wigner. Demonstraremos que, quando tomamos o limite clássico, a evolução temporal da função de Wigner é dada pela equação de Vlasov. A utilização da função de Wigner, cuja dinâmica é dada pela equação clássica de Vlasov, pode ser considerada como sendo uma aproximação semi-clássica. Esta consideração pode ser feita, pois mesmo a dinâmica sendo dada por uma equação clássica, a função de Wigner contém informação quântica do sistema.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 fazemos uma apresentação do sistema físico que será o objeto de nosso estudo. Definimos o termo matéria nuclear e introduzimos os campos de interação. Neste capítulo também são expostas as aproximações para matéria nuclear densa em equilíbrio e a aproximação de Hartree. A introdução do campo ele-

tromagnético $A^\mu(x)$ é feita na lagrangiana de campo médio (2.36) e (2.39). Mostramos como as partículas comportam-se nestas aproximações e calculamos suas autofunções evidenciando os níveis de Landau.

No capítulo 3 introduzimos a função de Wigner, deduzimos algumas propriedades e calculamos a equação de movimento para esta. Tomamos o limite clássico e mostramos que o nosso sistema comporta-se como um plasma quântico. Após isto, calculamos a função de Wigner para o nosso sistema em equilíbrio termodinâmico e a partir desta calculamos as equações de estado do sistema à temperatura nula. Chegamos em equações autoconsistentes para a densidade de energia e para a pressão parametrizadas em termos da densidade bariônica. Para resolvê-las implementamos um algoritmo simples em linguagem Fortran 90.

O capítulo 4 trata do cálculo da resposta linear a uma perturbação externa. Resolvemos analiticamente a equação de Vlasov (3.57) para o caso de uma perturbação elétrica em forma de onda plana longitudinal se propagando em uma direção perpendicular à direção do campo magnético. Na teoria clássica dos plasmas estas ondas são conhecidas como ondas de Bernstein [6]. O nosso desenvolvimento na seção 4.1 consiste em uma generalização quântica e relativística para os modos de Bernstein clássicos.

2 MATÉRIA NUCLEAR Densa EM CAMPO MAGNÉTICO FORTE

O objeto de estudo do nosso trabalho é um sistema físico formado pela matéria nuclear¹, densa e simétrica sob efeito de um campo magnético externo com intensidade maior que $10^{14}G$. Neste capítulo apresentamos um modelo para este sistema físico, que servirá de ponto de partida para a formulação de uma teoria de transporte. Por ser um modelo simples, covariante, facilmente generalizável e descrever importantes propriedades da matéria nuclear escolhemos o modelo $\sigma - \omega$ acrescido do campo magnético.

2.1 Matéria Nuclear

Considere um núcleo de um átomo com número de massa A , número de prótons Z e número de nêutrons N . Numa situação hipotética à temperatura nula (núcleo no estado fundamental), podemos imaginar o raio do núcleo tender ao infinito $R \rightarrow \infty$ e simultaneamente $Z, N \rightarrow \infty$. Efetuamos o limite de modo que a densidade de prótons $\rho_{(p)}$ e de nêutrons $\rho_{(n)}$ permaneçam constantes, ou seja com os prótons e nêutrons ocupando uniformemente o espaço das configurações. Também, levamos este sistema até o estado onde todas as variáveis macroscópicas permaneçam constantes (estado de equilíbrio termodinâmico). Neste núcleo de raio $R \rightarrow \infty$ e densidade de prótons constante desprezamos a interação Coulombiana entre os prótons. Este sistema hipotético nomeamos de *matéria nuclear*. Denominamos de matéria nuclear simétrica, a matéria nuclear onde $\rho_{(p)} = \rho_{(n)}$.

Uma grandeza importante relacionada com a matéria nuclear é a densidade de energia $\varepsilon(\rho_{(p)}, \rho_{(n)})$. Como cada nucleon² tem uma energia finita e positiva $E_{(i)}$ e na matéria nuclear temos $A \rightarrow \infty$, convém trabalharmos com uma quantidade de energia de um certo número de nucleons dividido pelo volume de espaço ocupado pelos mesmos, ou seja, uma densidade de energia. A função que relaciona ε com as densidades $\rho_{(p)}, \rho_{(n)}$ é denominada de equação de estado da matéria nuclear. O conhecimento da equação de estado para matéria nuclear em diferentes regimes de temperaturas, na presença de

¹O termo matéria nuclear remete a definição dada na seção 2.1 .

²O termo *nucleon* designa genericamente o próton ou o nêutron .

campos externos e em outros regimes é importante para vários campos de pesquisa, tais como em simulações de estrelas de nêutrons e supernovas e em reações envolvendo íons pesados.

Experimentalmente [7], verificamos que a matéria presente na região central do núcleo dos átomos com $A > 40$ apresenta densidade de nucleons constante $\rho_{(p)} + \rho_{(n)} = \rho_0 \approx 0,153\text{fm}^{-3}$. A matéria presente no caroço de núcleos finitos difere da matéria nuclear apenas quanto à interação Coulombiana e efeitos de tamanho finito. Então, temos uma fartura de dados experimentais em uma região da matéria nuclear, onde $\rho \approx \rho_0$ e $T \approx 0$. Estes dados são úteis para construção da equação de estado para matéria nuclear dentro desta região limitada.

Na matéria nuclear simétrica, para um determinado valor fixo de ρ , temos também um valor fixo para $\varepsilon(\rho)$. Se dividirmos $\varepsilon(\rho)$ por ρ teremos uma energia por nucleon, subtraindo a energia de repouso ficamos com uma energia de ligação por nucleon $\frac{B_0}{A}$. Esta última grandeza denotamos por:

$$\frac{B_0}{A} = a_V \quad ,$$

onde a_V pode ser determinada experimentalmente [8] para a matéria nuclear presente no caroço dos núcleos atômicos, tendo valor $a_V \approx -15,75\text{MeV}$. A densidade $\rho_0 = 0,153\text{fm}^{-3}$ e a energia de ligação por nucleon $\frac{B_0}{A} = -15,75\text{MeV}$ são conhecidos como pontos de saturação da matéria nuclear.

Uma outra grandeza importante é a incompressibilidade nuclear, definida por:

$$K(\rho) = 9\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \quad .$$

A incompressibilidade nuclear para a matéria nuclear no ponto de saturação K_0 pode ser medida por métodos indiretos (por exemplo, determinada através de medidas da energia de ressonância magnética gigante de monopolo isoscalar [9], dando $K_0 \approx 220\text{MeV}$). E devido a sua relação com ε , ela pode ser útil para extrapolarmos a equação de estado $\varepsilon(\rho)$ para outros regimes além

de ρ_0 .

Um estudo da matéria nuclear fora do equilíbrio termodinâmico também consiste em um elemento importante nos mesmos campos de pesquisa citados no parágrafo 3. Através deste estudo podemos prever propriedades óticas, elétricas, magnéticas, investigar o comportamento da pressão, investigar a ocorrência de modos coletivos de oscilação, e outros.

2.2 Modelo $\sigma - \omega$

De acordo com a definição dada na seção 2.1, a matéria nuclear consiste de um sistema composto por $A \rightarrow \infty$ nucleons interagindo através da interação forte. A interação forte, assim como todas as outras interações fundamentais, pode ser entendida³ como o acoplamento entre partículas materiais e partículas de campo. Denominamos todas estas partículas elementares envolvidas na interação forte de hádrons. Utilizamos também, por razões históricas, uma nomenclatura baseada na massa das partículas, onde os nucleons (massa pesada) são chamados de bárions e as partículas de campo na interação forte (massa mediana) são chamadas de mésons.

No regime de altas densidades e sob um forte campo magnético externo, os bárions presentes na matéria nuclear adquirem velocidades relativísticas. Então, precisamos de uma teoria que descreva um sistema de muitos corpos quântico e relativístico. Uma das melhores teorias que descreve tais sistemas é a teoria quântica de campos baseada em uma densidade lagrangiana local e invariante por transformações de Lorentz, onde os campos de bárions e mésons são tomados como sendo as coordenadas generalizadas da densidade lagrangiana. Esta teoria é chamada de hadrodinâmica quântica *QHD*. Ela é classificada como uma teoria efetiva, pois os hádrons são formados por conjunto de quarks interagentes. A teoria quântica de campos aplicada aos quarks é conhecida como cromodinâmica quântica ou *QCD*.

³O trabalho [10] pioneiro foi apresentado por Yukawa em 1935.

No modelo $\sigma - \omega$ incluímos os seguintes campos:

- Um campo bariônico para os nêutrons (spin- $\frac{1}{2}$) $\Psi_{(n)}(x)$ ⁴.
- Um campo bariônico para os prótons (spin- $\frac{1}{2}$) $\Psi_{(p)}(x)$.
- Um campo escalar neutro associado aos mésons $\sigma(x)$ (spin-0) acoplado com a densidade escalar $\bar{\Psi}\Psi$.
- Um campo vetorial neutro associado aos mésons $\omega_\mu(x)$ (spin-1) acoplado com a corrente bariônica $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$.

O campo Ψ tem oito componentes dadas por:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{(n)}(x) \\ \Psi_{(p)}(x) \end{pmatrix} . \quad (2.1)$$

Como prótons e nêutrons têm aproximadamente a mesma massa e este modelo não diferencia estas duas partículas, assumiremos que o campo Ψ é formado unicamente por partículas de massa M .

Os acoplamentos que precisamos incluir na densidade lagrangiana são:

$$\begin{aligned} & g_s \bar{\Psi}_{(n)}^\dagger(x) \sigma(x) \Psi_{(n)}(x) + g_s \bar{\Psi}_{(p)}^\dagger(x) \sigma(x) \Psi_{(p)}(x) \quad , \\ & g_v \bar{\Psi}_{(n)}(x) \gamma^\mu \omega_\mu(x) \Psi_{(n)}(x) + g_v \bar{\Psi}_{(p)}(x) \gamma^\mu \omega_\mu(x) \Psi_{(p)}(x) \quad . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Conforme demonstrado na referência [11], a troca de méson σ e ω entre dois nucleons (espalhamento) no limite onde temos bárions pesados

⁴Aqui e na maior parte do texto suprimimos o índice espinorial de Ψ_α . Este índice será explicitado somente quando necessário.

($M \rightarrow \infty$) e estáticos leva a um potencial efetivo dado por:

$$V_{ef}(|\vec{r}|) = \frac{g_v^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} - \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} , \quad (2.3)$$

onde g_v e g_s são as constantes de acoplamento, m_v e m_s são a massa de méson ω e do méson σ respectivamente e $|\vec{r}|$ é a distância entre os nucleons. Estas constantes são ajustadas para a teoria reproduzir a densidade de saturação ρ_0 e a energia de ligação por nucleon $\frac{B_0}{A}$ no ponto de saturação. Neste trabalho utilizamos os seguintes parâmetros [12]:

$M(\text{MeV})$	$m_s(\text{MeV})$	$m_v(\text{MeV})$	g_s	g_v
939	520	783	10,5	13,8

Tabela 2.1: Parâmetros do modelo $\sigma - \omega$ utilizados neste trabalho.

Com a escolha de parâmetros dada pela tabela 2.1, o potencial efetivo $V_{ef}(|\vec{r}|)$ mostra que a troca de mésons σ leva a uma interação atrativa de longo alcance e troca de mésons ω leva a uma interação repulsiva de curto alcance. Estes mésons são os mais importantes na descrição das principais propriedades da matéria nuclear simétrica [11].

Levando em consideração os campos e acoplamentos mencionados, fazemos a escolha pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(x) [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x)) - (M - g_s \sigma(x))] \Psi(x) + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - m_s^2 \sigma^2(x)) - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_\mu(x) \omega^\mu(x) , \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu(x) - \partial_\nu \omega_\mu(x) \quad . \quad (2.5)$$

O princípio de Hamilton pode ser enunciado como:

$$\delta S = \delta \int_\Gamma d^4x \mathcal{L}(q_i(x), \partial^\mu q_i(x)) = 0 \quad , \quad q_i = \Psi(x) \quad , \quad \sigma(x) \quad , \quad \omega(x) \quad , \quad (2.6)$$

onde $S = \int_\Gamma d^4x \mathcal{L}$ é denominada ação do sistema e Γ é um região arbitrária da espaço-tempo, cujas variações do campo se anulam em sua superfície. Utilizando o princípio de Hamilton deduzimos as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Introduzindo a lagrangiana⁵ (2.4) nas equações de Euler-Lagrange temos as seguintes equações de movimento para os campos:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma(x) + m_s^2 \sigma(x) = g_s \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (2.8)$$

$$\partial_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu(x) = g_v \bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x) \quad (2.9)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x)) - (M - g_s \sigma(x))] \Psi(x) = 0 \quad (2.10)$$

Agora procederemos com a quantização canônica do sistema, onde

⁵Daqui por diante nos referimos à densidade lagrangiana simplesmente como lagrangiana, como é usual na teoria de campos.

trocamos os campos clássicos e os campos conjugados por operadores na imagem de Heisenberg definidos sobre o espaço de Fock do sistema:

$$\Psi(x) \rightarrow \hat{\Psi}(x) \quad , \quad \pi_{\Psi}(x) \rightarrow \hat{\pi}_{\Psi}(x) \quad (2.11)$$

$$\sigma(x) \rightarrow \hat{\sigma}(x) \quad , \quad \pi_{\sigma}(x) \rightarrow \hat{\pi}_{\sigma}(x) \quad (2.12)$$

$$\omega^{\mu}(x) \rightarrow \hat{\omega}^{\mu}(x) \quad , \quad \pi_{\omega}^{\mu}(x) \rightarrow \hat{\pi}_{\omega}^{\mu}(x) \quad . \quad (2.13)$$

O campo canonicamente conjugado π_i é definido por:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q_i)} \quad , \quad q_i = \Psi \quad , \quad \sigma \quad , \quad \omega \quad . \quad (2.14)$$

Então, de acordo com a definição (2.14), temos:

$$\pi_{\Psi} = i\Psi^{\dagger} \quad , \quad \pi_{\sigma} = \partial_0 \sigma \quad , \quad \pi_{\omega}^{\mu} = \partial_0 \omega^{\mu} \quad , \quad \pi_{\bar{\Psi}} = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Agora impomos as seguintes relações de anticomutação(férmions) e comutação(bósons) a tempos iguais, que satisfazem o princípio⁶ da micro-causalidade:

⁶Medidas em dois pontos do espaço-tempo que tem uma separação do tipo espaço, não interferem entre si.

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Psi}_\alpha(t, \vec{r}), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(t, \vec{r}') \right]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \\ \left[\hat{\Psi}_\alpha(t, \vec{r}), \hat{\Psi}_\beta(t, \vec{r}') \right]_+ &= \left[\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(t, \vec{r}), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(t, \vec{r}') \right]_+ = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\sigma}(t, \vec{r}), \partial_0 \hat{\sigma}(t, \vec{r}') \right] &= i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \\ \left[\hat{\sigma}(t, \vec{r}), \hat{\sigma}(t, \vec{r}') \right] &= \left[\partial_0 \hat{\sigma}(t, \vec{r}), \partial_0 \hat{\sigma}(t, \vec{r}') \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\omega}^\mu(t, \vec{r}), \partial_0 \hat{\omega}^\nu(t, \vec{r}') \right] &= i g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \\ \left[\hat{\omega}^\mu(t, \vec{r}), \hat{\omega}^\nu(t, \vec{r}') \right] &= \left[\partial_0 \hat{\omega}^\mu(t, \vec{r}), \partial_0 \hat{\omega}^\nu(t, \vec{r}') \right] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde usamos $x = (t, \vec{r})$. A evolução temporal dos operadores de campo não é dada necessariamente [13] pela mesma equação de movimento dos campos clássicos (equações (2.8), (2.9) e (2.10)). A evolução temporal é dada pela equação de Heisenberg:

$$i \partial_t \hat{O}(t) = [\hat{O}(t), \hat{H}] \quad , \quad (2.19)$$

onde \hat{H} é operador hamiltoniano do sistema. Este operador é obtido aplicando-se as transformações (2.11), (2.12) e (2.13) nos campos presentes no hamiltoniano clássico H . O hamiltoniano clássico H é calculado através da densidade hamiltoniana \mathcal{H} :

$$H = \int d^3r \mathcal{H} \quad . \quad (2.20)$$

A densidade \mathcal{H} é dada por uma transformação de Legendre da densidade \mathcal{L} :

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i (\partial_t q_i) - \mathcal{L} \quad , \quad q_i = \Psi, \tilde{\Psi}, \sigma, \omega \quad . \quad (2.21)$$

O operador $\hat{\Psi}$ pode ser expandido em uma série de espinores de um bárion $\psi_\lambda^+(x)$ e um antibárion $\psi_\lambda^-(x)$ e seus operadores de aniquilação e criação respectivamente:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_\lambda \left(\psi_\lambda^+(x) \hat{a}_\lambda + \psi_\lambda^-(x) \hat{b}_\lambda^\dagger \right) \quad , \quad (2.22)$$

onde ψ^+ descreve um bárion com energia positiva e ψ^- descreve um antibárion com energia positiva (ou bárion com energia negativa). Os operadores \hat{a}_λ , \hat{b}_λ^\dagger são operadores de aniquilação e criação de bárions e antibárions respectivamente e obedecem as regras de anticomutação (2.16). O índice λ representa todos os números quânticos que caracterizam o sistema. O *vácuo físico* $|0\rangle$ é definido como o estado que não contém partículas nem antipartículas:

$$\hat{a}_\lambda |0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{b}_\lambda |0\rangle = 0 \quad . \quad (2.23)$$

O espaço de Fock pode ser construído pela repetida aplicação dos operadores de criação $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$ sobre o vácuo:

$$|\Phi\rangle = \prod_\lambda \hat{a}_\lambda^\dagger |0\rangle \otimes \prod_\lambda \hat{b}_\lambda^\dagger |0\rangle \quad . \quad (2.24)$$

Neste trabalho desprezamos as antipartículas⁷. Nesta aproximação temos

⁷Também conhecida como *no-sea approximation*.

simplesmente que:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\lambda=\text{vazio}}|\Phi\rangle &= 0 \quad , \quad \hat{a}_{\lambda=\text{ocupado}}^{\dagger}|\Phi\rangle = 0 \\ \hat{b}_{\lambda}|\Phi\rangle &= 0 \quad , \quad \forall \lambda \quad , \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde os valores esperados de um operador qualquer devem ser efetuados usando ordenamento normal [11][14], por exemplo a corrente bariônica é dada por:

$$\langle \hat{j}_B^{\mu} \rangle = \langle \Phi | : \hat{\Psi}(x) \gamma^{\mu} \hat{\Psi}(x) : | \Phi \rangle \quad (2.26)$$

Seguindo a teoria quântica usual [11], faríamos a caracterização da teoria através das regras de Feynman para o propagador bariônico definido por:

$$iG_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \equiv \langle \Phi | T \left[\hat{\Psi}_{\alpha}(x_1), \hat{\Psi}_{\beta}(x_2) \right] | \Phi \rangle \quad , \quad (2.27)$$

onde podemos calcular os valores esperados da teoria, como o (2.26), para qualquer ordem N de interação (diagramas de Feynman de ordem N). Nós seguiremos por outro caminho, onde calculamos os valores esperados de um operador através da *Função de Wigner*. A próxima seção é dedicada a uma exposição da aproximação de campo médio, que servirá de ferramenta para o cálculo da função de Wigner no capítulo 3.

2.3 Aproximação de Campo Médio para Matéria Nuclear

A aproximação de campo médio consiste em trocar o operador de campo pelo seu valor esperado:

$$\hat{q}_i(x) \rightarrow \langle q_i(x) \rangle, \quad q_i = \sigma, \omega^\mu, A^\mu, \text{ etc} \quad (2.28)$$

Podemos justificar esta aproximação para os campos de mésons na matéria nuclear da seguinte maneira. Considere um sistema estático e uniforme, de modo que a corrente bariônica \vec{j}_B se anule e que $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ e j_B^0 sejam independentes de x_μ . De acordo com as equações (2.8) e (2.9), temos que:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma(x) + m_s^2 \sigma(x) = g_s \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rightarrow m_s^2 \sigma_0 = g_s \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \quad (2.29)$$

$$\partial_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu(x) = g_v \bar{\Psi}(x)\gamma^\nu \Psi(x) \rightarrow m_v^2 \omega^0 = g_v \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \Psi(x) = g_v \Psi^\dagger(x)\Psi(x), \quad (2.30)$$

onde através da última equação vemos que a imposição de que $\vec{j}_B = 0$ implica em $\vec{\omega} = 0$. Definindo a densidade escalar como $\rho_s \equiv \bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ e reescrevendo as equações acima, temos:

$$\sigma_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s, \quad \omega^0 = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B, \quad (2.31)$$

onde vemos que os valores clássicos para os campos crescem linearmente com as densidades. Então no regime de altas densidades bariônica e escalar, os campos σ_0 e ω^0 são intensos o suficiente para que a quantização dos

mesmos seja imperceptível. Usando o mesmo argumento, também trocamos os operadores $\hat{\rho}_s$ e $\hat{\rho}_B$ por seus valores esperados. Como estamos com um sistema estático e uniforme, calculamos os valores esperados no estado fundamental $|\Phi_0\rangle$ do sistema:

$$\hat{\Psi}\hat{\Psi} \rightarrow \langle \Phi_0 | : \hat{\Psi}\hat{\Psi} : | \Phi_0 \rangle = \rho_s \quad (2.32)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} \rightarrow \langle \Phi_0 | : \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} : | \Phi_0 \rangle = j_B^0 = \rho_B \quad . \quad (2.33)$$

Agora reescrevemos a lagrangiana (2.4) para um sistema denso, estático e uniforme usando a aproximação de campo médio:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x) [\gamma_\mu i \partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - (M - g_s \sigma_0)] \Psi(x) - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 \quad . \quad (2.34)$$

Denominamos esta lagrangiana de aproximação \mathcal{L}_0 . Agora analogamente aos campos clássicos mesônicos, também aplicamos a aproximação de campo médio ao campo magnético intenso, externo e constante $A^\mu = (0, 0, B_0 x, 0)$. Este campo está alinhado com o versor \hat{e}_3 :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times B_0 x \hat{e}_2 = B_0 \hat{e}_3 \quad . \quad (2.35)$$

Introduzimos o campo A^μ na lagrangiana anterior (2.34), acoplado com a corrente bariônica de prótons, com constante de acoplamento $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{0M} = & \bar{\Psi}_{(p)}(x) [\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - eA^\mu - (m_{(p)} - g_s \sigma_0)] \Psi_{(p)}(x) - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} B_0^2 + \bar{\Psi}_{(n)}(x) [\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - (m_{(n)} - g_s \sigma_0)] \Psi_{(n)}(x) \quad .
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Denominamos esta lagrangiana de aproximação \mathcal{L}_{0M} . Nesta aproximação, as partículas comportam-se como partículas livres obedecendo o princípio de Pauli e interagindo com os campos externos. Assim, com esta lagrangiana reduzimos o problema de muitos corpos para o problema de uma simples partícula em um campo externo obedecendo as seguintes equações:

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - (m_{(n)} - g_s \sigma_0)] \Psi_{(n)}(x) = 0 \tag{2.37}$$

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - e\gamma_\mu A^\mu - (m_{(p)} - g_s \sigma_0)] \Psi_{(p)}(x) = 0 \quad . \tag{2.38}$$

De um modo mais geral, os campos médios σ e ω dependem de x^μ . Então a lagrangiana anterior fica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{HM} = & \bar{\Psi}_{(p)}(x) [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x) - eA^\mu) - (m_{(p)} - g_s \sigma(x))] \Psi_{(p)}(x) + \\
& - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma^2(x) + \frac{1}{2} m_v^2 \omega^\mu(x) \omega_\mu(x) + \frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \\
& + \bar{\Psi}_{(n)}(x) [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x)) - (m_{(n)} - g_s \sigma(x))] \Psi_{(n)}(x) \quad .
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Denominamos esta lagrangiana de aproximação \mathcal{L}_{HM} . Esta aproximação é conhecida como aproximação de Hartree, por isso utilizamos o índice H . A densidade hamiltoniana para esta lagrangiana é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{HM} &= \sum_i q_i \pi_i - \mathcal{L}_{HM} \\
&= \Psi_{(n)}^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_{(n)}^*) \Psi_{(n)} + \bar{\Psi}_{(n)} (g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x)) \Psi_{(n)} + \Psi_{(p)}^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \\
&+ \beta m_{(p)}^*) \Psi_{(p)} + \bar{\Psi}_{(p)} (g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) + e \gamma_\mu A^\mu) \Psi_{(p)} + f(\omega^\mu, \sigma) - \frac{1}{2} B_0^2 \quad , \\
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $m_{(i)}^* = m_{(i)} - g_s \sigma$ e $f(\omega^\mu, \sigma)$ é um funcional de ω^μ e σ . O operador hamiltoniano dado pela equação (2.20) fica:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int d^3x \left[\hat{\Psi}_{(n)}^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_{(n)}^*) \hat{\Psi}_{(n)} + \hat{\bar{\Psi}}_{(n)} (g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x)) \hat{\Psi}_{(n)} \right] + \\
&+ \int d^3x \left[\hat{\Psi}_{(p)}^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_{(p)}^*) \hat{\Psi}_{(p)} + \hat{\bar{\Psi}}_{(p)} (g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) + e \gamma_\mu A^\mu) \hat{\Psi}_{(p)} \right] + \\
&+ \int d^3x \left[f(\omega^\mu, \sigma) - \frac{1}{2} B_0^2 \right] \quad .
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora, usando a equação de Heisenberg (2.19), calculamos as equações de movimento para os operadores $\hat{\Psi}_{(n)}$ e $\hat{\Psi}_{(p)}$:

$$i\partial_0 \hat{\Psi}_{(n)} = [\hat{\Psi}_{(n)}, \hat{H}] \Rightarrow [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x)) - (m_{(n)} - g_s \sigma(x))] \hat{\Psi}_{(n)}(x) = 0 \tag{2.42}$$

$$i\partial_0 \hat{\Psi}_{(p)} = [\hat{\Psi}_{(p)}, \hat{H}] \Rightarrow [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu(x) - e A^\mu) - (m_{(p)} - g_s \sigma(x))] \hat{\Psi}_{(p)}(x) = 0 \quad . \tag{2.43}$$

2.3.1 Valores Esperados

O Valor esperado do operador densidade bariônica pode ser escrito em função dos espinores de Dirac⁸ de uma partícula $\psi(x)$. Desprezando os antibárions, reescrevemos o operador densidade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\rho_B &= \langle \Phi_0 | \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \sum_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta | \Phi_0 \rangle \psi_\alpha^{\dagger+}(x) \psi_\beta^+(x) \\ &= \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \psi_\alpha^{\dagger+}(x) \psi_\beta^+(x) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \psi_\alpha^{\dagger+}(x) \psi_\alpha^+(x) \quad , \quad (2.44)\end{aligned}$$

onde utilizamos as propriedades de ortonormalidade dos vetores de estado de n-partículas $|\Phi\rangle$ e n_α é o número de ocupação do estado $|\alpha\rangle$ de uma partícula. Podemos reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned}\langle \Phi_0 | \hat{\rho}_B(x) | \Phi_0 \rangle &= \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \psi_\alpha^{\dagger+}(x) \psi_\beta^+(x) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \psi_\alpha^{\dagger+}(x) \psi_\alpha^+(x) \\ &= \langle x | \sum_{\alpha} n_{\alpha} | \alpha \rangle \langle \alpha | x \rangle = \langle x | \hat{n}_B | x \rangle \quad , \quad (2.45)\end{aligned}$$

onde \hat{n}_B é o operador densidade bariônica atuando sobre o espaço dos espinores de um bárion (operador de um corpo) e α ou β formam um conjunto completo de números quânticos. O operador \hat{n}_B é a representação do operador $\hat{\rho}_B$, que atua sobre o espaço de Fock, no espaço dos espinores de Dirac de uma partícula.

De um modo geral, podemos calcular o valor esperado de um operador aditivo $\hat{R} = \sum \hat{R}_1$, onde \hat{R}_1 atua sobre o espaço dos espinores de uma partícula. O valor esperado no estado fundamental Φ_0 fica:

⁸No texto que segue adiante, todos os espinores são espinores de Dirac. Então, nos referimos a eles simplesmente como espinores.

$$\langle \Phi_0 | \hat{R} | \Phi_0 \rangle = \text{Tr} [\hat{n}_B \hat{R}_1] = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \hat{R}_1 | \alpha \rangle n_{\alpha} \quad . \quad (2.46)$$

Para calcularmos os valores esperados na aproximação \mathcal{L}_{0M} devemos conhecer os espinores das equações (2.37) e (2.38). A resolução da equação (2.37) para o espinor $\psi_{(n)}^+(x)$ é encontrada no Apêndice A.1 e sua solução é dada por:

$$\psi_{(n),s=+1}^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{E^* + m_{(n)}^*}{2E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\Pi_z}{E^* + m_{(n)}^*} \\ \frac{\Pi_x + i\Pi_y}{E^* + m_{(n)}^*} \end{bmatrix} e^{i\vec{\Pi} \cdot \vec{r}} e^{-iEt} \quad , \quad (2.47)$$

e :

$$\psi_{(n),s=-1}^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{E^* + m_{(n)}^*}{2E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-\Pi_z}{E^* + m_{(n)}^*} \\ \frac{\Pi_x - i\Pi_y}{E^* + m_{(n)}^*} \end{bmatrix} e^{i\vec{\Pi} \cdot \vec{r}} e^{-iEt} \quad , \quad (2.48)$$

onde:

$$E = g_v \omega^0 + \sqrt{\Pi^2 + m_{(n)}^{*2}} \quad , \quad E^* = E - g_v \omega^0 \quad . \quad (2.49)$$

A resolução da equação (2.38) para o espinor $\psi_{(p)}^+(x)$ é encontrada no Apêndice A.2 e sua solução é dada por:

$$\psi_{(p)}^+(x) = N h_s(\xi) e^{i\Pi_y y + i\Pi_z z} e^{-iE(l, \Pi_z)t} , \quad (2.50)$$

onde o número quântico l é conhecido como nível de Landau e:

$$E = g_v \omega^0 + \sqrt{\Pi_z^2 + m_{(p)}^{*2} + 2(l + \frac{1}{2}(-s+1))eB_0} , \quad E^* = E - g_v \omega^0 \quad (2.51)$$

$$v_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (2.52)$$

$$\xi = (eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{\Pi_y}{eB_0} \right) , \quad (2.53)$$

e:

$$h_{s=+1} = \begin{bmatrix} (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\xi) \\ 0 \\ \Pi_z v_l(\xi) \\ -i\sqrt{2leB_0}v_{l-1}(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$h_{s=-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\xi) \\ i\sqrt{2(l+1)eB_0}v_{l+1}(\xi) \\ -\Pi_z v_l(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$N = (eB_0)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\pi} \left(2E^*(E^* + m_{(p)}^*) \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (2.56)$$

$$n = l + \frac{1}{2}(-s+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots , \quad s = \pm 1 , \quad (2.57)$$

3 FUNÇÃO DE WIGNER

Devido ao trabalho pioneiro de Max Born [15], nós podemos interpretar a mecânica quântica como sendo uma teoria de natureza estatística. De acordo com este, as predições da mecânica quântica para um sistema composto por uma partícula não devem corresponder a uma simples medida. Estas devem corresponder a um valor médio obtido por uma série de repetições da mesma medida, ou seja, a uma média sobre um *ensemble*¹ destas partículas. Na mecânica clássica, um ensemble pode ser descrito por uma função $\mathcal{P}(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)}, t)$, que é a probabilidade do sistema ser encontrado em um determinado microestado $(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)})$ no instante t . Baseado nesta idéia somos instigados a procurar uma nova representação para a mecânica quântica, onde fique evidente a redução da mecânica quântica à mecânica estatística clássica no limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$). A mecânica quântica para um sistema de $N \rightarrow \infty$ corpos é descrita pelo operador densidade $\hat{\rho}$ e a mecânica clássica é bem descrita por uma função de distribuição de um corpo (definida na próxima seção) $f_1(\vec{r}, \vec{\Pi})$. Então, convém buscarmos uma representação do operador densidade $\hat{\rho}$ na base das coordenadas \vec{r} e dos momentos² $\vec{\Pi}$. Esta nova representação, que denominaremos representação de Wigner $F(\vec{r}, \vec{\Pi})$, foi desenvolvida originalmente por Wigner [16] para um sistema com uma partícula em uma dimensão, cujo estado denotaremos por $|\phi\rangle$. Obviamente, para este sistema o conjunto de vetores (x, Π) formam o espaço de fase do sistema. Em seu artigo pioneiro, Wigner definiu a seguinte função:

$$F(x, \Pi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\Pi\zeta} \langle x + \frac{\zeta}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{\zeta}{2} \rangle \quad (3.1)$$

Wigner demonstrou [17] que $F(x, \Pi)$ dada pela equação (3.1) é a única escolha possível se impusermos as seguintes condições:

- Existe um operador Hermitiano \hat{F} , tal que $F(x, \Pi) = \langle \phi | \hat{F}(x, \Pi) | \phi \rangle$.

¹ Uma coleção imaginária de sistemas idênticos em composição, mas em diferentes microestados.

² Aqui vários autores fazem confusão com os termos momento cinético e momento canônico conjugado a uma coordenada, buscamos elucidar estas confusões com este trabalho.

- $\int dx d\Pi F(x, \Pi) = 1.$

- $F(x, \Pi)$ se transforma da mesma maneira que $\phi(x)$ quando submetido a translações e reflexões no espaço de fase e inversão temporal.

- Quando desprezamos termos de ordem quadrática ou maiores em \hbar , a dinâmica de $F(x, \Pi)$ é a mesma de $f_1(x, \Pi)$ clássica.

O nosso grande interesse consiste em utilizar a função de Wigner para o cálculo de valores esperados e não especificamente em sua interpretação física. Pela proximidade das equações da mecânica quântica na formulação de Wigner com as da mecânica estatística clássica, podemos usar os métodos matemáticos clássicos para resolver problemas quânticos em uma aproximação semi-clássica. Portanto, a função de Wigner consiste em uma magnífica ferramenta matemática. Neste trabalho vamos utilizar uma generalização relativística e para um sistema de $N \rightarrow \infty$ corpos da equação (3.1). Para isto, apresentamos na próxima seção, uma curta revisão da mecânica estatística clássica no espaço de fase.

3.1 Mecânica Estatística Clássica no Espaço de Fase

Na mecânica clássica, um ponto no espaço de fase representa um estado físico do sistema. Se o sistema físico é composto por N partículas, o espaço de fase é o um espaço cartesiano de $6N$ dimensões cujos pontos são representados pelos vetores $(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)}) = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{\Pi}_1, \dots, \vec{\Pi}_N)$, onde \vec{q}_i são as coordenadas generalizadas que descrevem a partícula i e $\vec{\Pi}_i$ são os momentos canônicos conjugados às \vec{q}_i . Uma curva no espaço de fase com parâmetro t representa a evolução temporal do sistema. Para um sistema físico realista composto por um número N muito grande de partículas e dinâmico é impraticável o cálculo destas curvas. Então, usamos um argumento estatístico para construir uma função $\mathcal{P}(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)}, t)$ que representa a probabilidade

do estado físico estar contido no elemento de volume $d^{3N}q d^{3N}\Pi$ centrado em $(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)})$ no instante t . $\mathcal{P}(\vec{q}^{(N)}, \vec{\Pi}^{(N)}, t)$ corresponde a uma densidade de microestados em um ensemble e sua evolução temporal é análoga a evolução de um fluido incompressível, ou seja, estabelecemos o teorema de Liouville [18]:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P} = \partial_t \mathcal{P} + \{ \mathcal{P}, H \} = 0 \quad , \quad (3.2)$$

onde H é o Hamiltoniano clássico do sistema e $\{, \}$ é o parêntesis de Poisson definido por:

$$\{ \mathcal{P}, H \} = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial \Pi_k} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \Pi_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad . \quad (3.3)$$

Agora vamos utilizar a notação $(\vec{q}_i, \vec{\Pi}_i) = z_i$ e considerar o sistema formado por partículas idênticas. Nós podemos reduzir a densidade $\mathcal{P}(z^{(N)}, t)$ para a densidade $f_s(z^{(s)}, t)$ através de uma integração. $f_s(z^{(s)}, t)$ é uma função de um subgrupo de coordenadas (z_1, \dots, z_s) do sistema, onde $s < N$. A densidade reduzida fica:

$$f_s(z_1, z_2, \dots, z_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int dz_{s+1} \dots \int dz_N \mathcal{P}(z_1, z_2, \dots, z_N, t) \quad . \quad (3.4)$$

Se assumirmos que $\vec{q} = \vec{r}$ e normalizarmos a densidade $f_1(z) = f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t)$ da seguinte maneira:

$$\int d^3r d^3\Pi f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = N \quad , \quad (3.5)$$

podemos interpretar f_1 como sendo o número de partículas dentro do elemento de volume d^3r centrado em \vec{r} e com momento canônico dentro de $d^3\Pi$ centrado em $\vec{\Pi}$. Através da função $f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t)$, que denominamos função de distribuição de um corpo, podemos calcular os valores médios na mecânica clássica. Por exemplo, a densidade de partículas é dada por:

$$\rho(\vec{r}, t) = \int d^3\Pi f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) \quad , \quad (3.6)$$

a corrente de partículas:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int d^3\Pi \vec{v} f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) \quad . \quad (3.7)$$

O valor médio de uma variável dinâmica $A(\vec{r}, \vec{\Pi}, t)$:

$$\bar{A}(t) = \int d^3r d^3\Pi A(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) \quad . \quad (3.8)$$

Aplicando o teorema de Liouville na equação (3.4), deduzimos [19] uma série de equações de movimento acopladas para as funções reduzidas $f_s(z^{(s)}, t)$. Esta série é conhecida como hierarquia *BBGKY*. Se truncarmos esta série no termo de um corpo, considerarmos que as partículas interagem somente com um potencial externo e efetuarmos a mudança de variável $\vec{\Pi} \rightarrow \vec{p}$ [20] obtemos a *equação de Vlasov*³:

$$[\partial_t + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla + (\dot{\vec{p}} \cdot \nabla_p)] f_1(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0 \quad , \quad (3.9)$$

³A equação de Vlasov tem a mesma forma na relatividade restrita [18] quando utilizamos uma força invariante por transformações de Lorentz $\dot{\vec{p}}$.

onde \vec{p} é a força externa aplicada sobre cada partícula.

3.2 Função de Wigner Covariante

Nesta seção vamos definir uma generalização quântica, relativística e para partículas de spin $\frac{1}{2}$ da função de distribuição de um corpo clássica $f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t)$. Esta definição não é única ⁴ e não é sempre positiva, portanto não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade. Neste trabalho usamos a seguinte definição [22],[23],[24] para a matriz de Wigner covariante de um corpo:

$$F(x, \Pi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp[-i\Pi^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}(x - \frac{1}{2}R) :> , \quad (3.10)$$

cujo elementos de matriz são números reais dados por:

$$F_{\alpha\beta}(x, \Pi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp[-i\Pi^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{1}{2}R) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{1}{2}R) :> , \quad (3.11)$$

onde α, β correm de 1 até 8, Π^μ é o momento canônico clássico conjugado à coordenada x^μ e $<: \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{1}{2}R) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{1}{2}R) :>$ denota a média estatística quântica sobre o produto dos operadores $\hat{\Psi}_\beta(x + \frac{1}{2}R) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{1}{2}R)$ em ordenamento normal.

Agora dividiremos o problema em duas partes, uma correspondendo a matéria composta por prótons e outra pelos nêutrons. Esta decomposição nos graus de liberdade de isospin levará a equações diferentes para prótons e

⁴Os autores do trabalho [21] definem esta generalização de outra maneira.

nêutrons, mas acopladas pelos campos σ e ω . Considerando um espaço de fase para prótons e outro para os nêutrons, vamos definir a matriz de Wigner para prótons, como sendo:

$$F_{(p)}(x, \Pi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R \exp[-i\Pi_{(p)}^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}_{(p)}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}_{(p)}(x - \frac{1}{2}R) :> , \quad (3.12)$$

onde $\Pi_{(p)}^\mu = p^\mu + eA^\mu + g_v \omega^\mu$ [25] e agora α, β são índices espinoriais que correm de 1 até 4. Similarmente, para os nêutrons definimos:

$$F_{(n)}(x, \Pi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R \exp[-i\Pi_{(n)}^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}_{(n)}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}_{(n)}(x - \frac{1}{2}R) :> , \quad (3.13)$$

onde $\Pi_{(n)}^\mu = p^\mu + g_v \omega^\mu$ e α, β são índices espinoriais que correm de 1 até 4.

Agora observemos a importante propriedade que justifica as definições. Vamos reescrever o valor esperado de um operador aditivo de um corpo \hat{O} , que não tem dependência com o isospin⁵, como (eq. 2.46):

$$< \hat{O} > = < \Phi_0 | \hat{O} | \Phi_0 > = \sum_{\lambda} < \lambda | \hat{O} | \lambda > n_{\lambda} , \quad (3.14)$$

onde λ são os números quânticos que caracterizam o sistema e n_{λ} agora é interpretado como sendo o peso estatístico do estado λ . Então podemos reescrever o valor esperado [26], representando \hat{O} em termos dos operadores $\hat{\Psi}$ e $\hat{\bar{\Psi}}$ e explicitando os índices espinoriais.

⁵Ou seja, não diferencia próton de nêutron. De modo geral os operadores terão dependência com o isospin. Esta dependência com o isospin será evidenciada quando necessário.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle &= \langle : \int d^4x \hat{\Psi}(x) \hat{O}_1(x) \hat{\Psi}(x) : \rangle \\
&= \langle : \int d^4x \hat{\Psi}_{(p)}(x) \hat{O}_1(x) \hat{\Psi}_{(p)}(x) + \int d^4x \hat{\Psi}_{(n)}(x) \hat{O}_1(x) \hat{\Psi}_{(n)}(x) : \rangle \\
&= \int d^4x \text{Sp} \left[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\Psi}_{(p)}(x) \otimes \hat{\Psi}_{(p)}(x) : \rangle \right] + \\
&\quad \int d^4x \text{Sp} \left[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\Psi}_{(n)}(x) \otimes \hat{\Psi}_{(n)}(x) : \rangle \right] \\
&= \int d^4x d^4R \delta^{(4)}(R) \text{Sp} \left[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\Psi}_{(p)}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}_{(p)}(x - \frac{1}{2}R) : \rangle \right] \\
&\quad + \int d^4x d^4R \delta^{(4)}(R) \text{Sp} \left[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\Psi}_{(n)}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}_{(n)}(x - \frac{1}{2}R) : \rangle \right] \\
&= \int d^4x d^4\Pi_{(p)} \text{Sp} [\hat{O}_1(x) F_{(p)}] + \int d^4x d^4\Pi_{(n)} \text{Sp} [\hat{O}_1(x) F_{(n)}] \quad , \quad (3.15)
\end{aligned}$$

onde Sp é o traço sobre os índices espinoriais definido pela eq. (2) e utilizamos a seguinte propriedade da função delta:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\Pi e^{-i\Pi^\mu R_\mu} = \delta^{(4)}(R) \quad . \quad (3.16)$$

Então, vemos que a função de Wigner é uma ferramenta para o cálculo de valores esperados similar à função de distribuição clássica $f_1(\vec{r}, \vec{\Pi}, t)$. A densidade escalar de prótons equação (2.32) e a densidade de prótons ficam:

$$\rho_{(p)s}(x) = \langle \hat{\Psi}_{(p)} \hat{\Psi}_{(p)} \rangle = \int d^4\Pi \text{Sp} [F_{(p)}(x, \Pi)] \quad (3.17)$$

$$\rho_{(p)}(x) = \langle \hat{\Psi}_{(p)} \gamma^0 \hat{\Psi}_{(p)} \rangle = \int d^4\Pi \text{Sp} [\gamma^0 F_{(p)}(x, \Pi)] \quad . \quad (3.18)$$

Utilizamos o fato de que $d^4x d^4\Pi_{(p)} = d^4x d^4p$ conforme demonstrado⁶ no apêndice B.1. Podemos reescrever a densidade de prótons da seguinte maneira:

$$\rho_{(p)}(x) = \int d^4p \operatorname{Sp} [\gamma^0 F_{(p)}(x, p)] = \int d^3p f_{(p)}(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad , \quad (3.19)$$

ou seja, omitindo o índice (1) em f_1 aqui e em diante, a equação acima implica em:

$$f_{(p)}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int dp^0 \operatorname{Sp} [\gamma^0 F_{(p)}(x, p)] \quad , \quad (3.20)$$

e analogamente para os nêutrons:

$$f_{(n)}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int dp^0 \operatorname{Sp} [\gamma^0 F_{(n)}(x, p)] \quad . \quad (3.21)$$

3.2.1 Equação de Movimento

Nesta seção vamos deduzir uma equação de movimento para a matriz de Wigner. Para isto usamos as equações de movimento para os operadores de campo na aproximação de Hartree \mathcal{L}_{HM} (equações (2.42) e (2.43)) e as definições dadas pelas equações (3.12) e (3.13). Vamos deduzir esta equação

⁶Alguns autores trocam de maneira errada o momento canônico pela momento cinético quando estão lidando com equações no espaço de fase. No entanto [20], estes têm acertado em suas predições devido à equivalência entre os elementos de volume demonstrada no apêndice B.1

de movimento para a Matriz de Wigner definida para os prótons. A equação de transporte para a matriz de Wigner dos nêutrons pode ser deduzida de maneira análoga, onde devemos apenas suprimir o campo $A^\mu(x)$.

Suprimindo o índice (p) na definição (3.11), fazendo a troca de variáveis $x_1 = x + \frac{1}{2}R$ e $x_2 = x - \frac{1}{2}R$ e derivando em relação à x_μ , temos:

$$\begin{aligned}
 & [\partial^\mu - 2i\Pi^\mu] F \\
 = & \frac{2}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp[-i\Pi^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}(x_1) \otimes (\partial_{x_2}^\nu \hat{\Psi}(x_2)) :> , \\
 & [\gamma_\mu (\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im] F \\
 = & \frac{2}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp[-i\Pi^\mu R_\mu] <: \hat{\Psi}(x_1) \otimes (\gamma_\nu \partial_{x_2}^\nu \hat{\Psi}(x_2) + im\hat{\Psi}(x_2)) :> ,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde na última linha multiplicamos por γ_μ e somamos $2imF$ respectivamente. Agora usando a equação de movimento para os operadores de campo (eq. 2.43):

$$\begin{aligned}
 & [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\nu \omega^\mu(x) - eA^\mu) - (m - g_s \sigma(x))] \hat{\Psi}(x) = 0 \\
 & (\gamma_\mu \partial^\mu + im) \hat{\Psi}(x) = i(g_s \sigma(x) - g_\nu \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu) \hat{\Psi}(x) ,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

o lado direito da equação (3.22) fica:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp[-i\Pi^\mu R_\mu] \times \\
 & \times <: \hat{\Psi}(x_1) \otimes (g_s \sigma(x_2) - g_\nu \gamma_\mu \omega^\mu(x_2) - e\gamma_\mu A^\mu(x_2)) \hat{\Psi}(x_2) :> .
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Devido a aproximação de campo médio, os campos $\sigma(x_2)$, $\omega^\mu(x_2)$ e $A^\mu(x_2)$ podem ser extraídos da média $\langle || \rangle$. Estes também podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned}\sigma(x_2) &= \sigma\left(x - \frac{1}{2}R\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} \sigma(x) \\ \omega^\mu(x_2) &= \omega^\mu\left(x - \frac{1}{2}R\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} \omega^\mu(x) \\ A^\mu(x_2) &= A^\mu\left(x - \frac{1}{2}R\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} A^\mu(x) \quad ,\end{aligned}\tag{3.25}$$

resultando em:

$$\begin{aligned}& \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4R \, e^{-i\Pi^\mu R_\mu} e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) \times \\& \times \langle : \hat{\Psi}(x_1) \otimes \hat{\Psi}(x_2) : \rangle \\&= \frac{2i}{(2\pi)^4} e^{-\frac{1}{2}\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu} \int d^4R \, e^{-i\Pi^\mu R_\mu} (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) \times \\& \times \langle : \hat{\Psi}(x_1) \otimes \hat{\Psi}(x_2) : \rangle \\&= 2ie^{-\frac{1}{2}\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) F \quad ,\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde no operador $e^{-\frac{1}{2}\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu}$, a derivada ∂_μ^Π atua somente sobre a matriz de Wigner F e a derivada ∂_x^μ atua somente sobre os campos $\sigma(x)$, $\omega^\mu(x)$ e $A^\mu(x)$. Substituindo o resultado acima na equação (3.22) chegamos a uma equação de movimento para a matriz de Wigner:

$$\begin{aligned}
& [\gamma_\mu (\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im] F(x, \Pi) = \\
& = 2ie^{-\frac{1}{2}\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x)) F(x, \Pi) \quad . \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Chegamos a um conjunto de 16 equações acopladas pelos campos de interação que determinam a dinâmica da matriz de Wigner. Este conjunto de equações constitui um formidável problema matemático e não será resolvido completamente neste trabalho. Na próxima seção descrevemos duas aproximações que permitem reduzir o problema acima (equação (3.27)) a uma equação com a mesma forma funcional da equação (3.9), ou seja, uma equação de Vlasov.

3.2.2 Limite Clássico e Aproximação de Spin Saturado

Com a intenção de simplificar a equação (3.27), vamos usar duas aproximações. A primeira é considerar a matriz de Wigner como sendo uma função suave no espaço (x, Π) , expandir a equação (3.27) em uma série de potências de $\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu$ e restringir nosso estudo para a primeira ordem em $\partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu$. A segunda aproximação consiste em restringir nosso estudo para um *sistema de spin saturado*, ou seja, onde desprezamos a contribuição do spin para as correntes calculadas através da matriz de Wigner. Para usar a segunda restrição efetuamos uma decomposição da matriz de Wigner em uma parte convectiva e outra dependente do spin [27][21], similar a decomposição de Gordon para o operador corrente [28]. Efetuamos o limite clássico nesta decomposição e eliminamos a parte dependente do spin e dependente de \hbar . Estas duas aproximações e o limite clássico implicam na obtenção de uma equação equivalente a equação de Vlasov para um plasma clássico. Um tratamento que leva em consideração o grau de liberdade de spin da matriz de Wigner e todas as ordens em \hbar no contexto da QED pode ser encontrado em [29].

Vamos começar com a expansão em \hbar , explicitando \hbar na equação (3.27) temos:

$$\begin{aligned}
& [\gamma_\mu (\hbar \partial^\mu - 2i\Pi^\mu) - 2im] F(x, \Pi) = \\
& = 2ie^{-\frac{1}{2}\hbar \partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x)) F(x, \Pi) \quad . \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Considerando que F possui elementos de matrizes que são funções suaves no espaço (x, Π) , expandimos o operador exponencial na equação anterior e desconsideramos os termos de ordem maior que um nas derivadas. Esta simplificação resulta em:

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}(i\hbar \partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}i\hbar \partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu)^n}{n!} \cong 1 - \frac{1}{2}i\hbar \partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu \quad , \\
& [\gamma_\mu (\hbar \partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im] F = \\
& = 2i \left(1 - \frac{1}{2}i\hbar \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu \right) (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x)) F \quad , \\
& 2i [-\gamma_\mu (\Pi^\mu - g_v w^\mu - eA) + m - g_s \sigma] F = \\
& = -\gamma_\mu \hbar \partial^\mu + \hbar \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x)) F \quad . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

De acordo com a definição (3.10), a matriz de Wigner possui elementos de matrizes reais. Sendo assim, a parte imaginária e a parte real da equação acima devem ser satisfeitas separadamente. A parte imaginária da equação anterior é:

$$\begin{aligned}
((\gamma_\mu p^\mu) - m^*) F &= 0 \\
p^\mu &= \Pi^\mu - g_v w^\mu - eA^\mu \quad , \quad m^* = m - g_s \sigma \quad , \quad (3.30)
\end{aligned}$$

e a parte real :

$$\gamma_\mu \partial^\mu - \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_s \sigma(x) - g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x)) F = 0 \quad . \quad (3.31)$$

De acordo com o apêndice C, em um sistema de spin saturado e no limite clássico, podemos escrever a matriz de Wigner como:

$$F(x, \Pi) = \mathcal{F}(x, \Pi) \mathbf{1}_4 + \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu(x, \Pi) \quad , \quad (3.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[F] \\ \mathcal{V}_\mu &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[\gamma_\mu F] \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aplicando o traço na equação (3.30) e usando a expansão (3.32), temos:

$$\begin{aligned} \text{Sp}[\gamma_\mu p^\mu F] &= \text{Sp}[m^* F] \\ p_\mu \mathcal{V}^\mu &= m^* \mathcal{F} \quad . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando o traço na equação (3.31) e usando a expansão (3.32), temos:

$$\begin{aligned}
& \text{Sp} [\partial_v^\Pi \partial_x^\nu g_s \sigma(x) F] = \\
& = \text{Sp} \{ [\partial_\mu \gamma^\mu + \partial_v^\Pi \partial_x^\nu (g_v \omega_\mu(x) \gamma^\mu + e A_\mu(x) \gamma^\mu)] F \} \quad , \\
& [\partial_\mu + \partial_v^\Pi \partial_x^\nu (g_v \omega_\mu(x) + e A_\mu(x))] \gamma^\mu = g_s \partial_v^\Pi \partial_x^\nu (\sigma(x) \mathcal{F}) . \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.30) por $(\gamma_v p^v + m^*)$ e considerando que F é não nula, temos:

$$\begin{aligned}
((\gamma_v p^v \gamma_\mu p^\mu) - m^{2*}) F &= 0 \\
((\gamma_v p^v \gamma_\mu p^\mu) - m^{2*}) \mathbf{1}_4 &= 0 \\
\text{Sp} [(\gamma_v p^v \gamma_\mu p^\mu) - m^{2*}] \mathbf{1}_4 &= [4g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu - 4m^{2*}] = 0 \Rightarrow p^2 = m^{2*} . \quad (3.36)
\end{aligned}$$

A igualdade anterior é conhecida como *condição de camada de massa*. Utilizando esta condição e a equação (3.34) podemos reescrever a equação (3.35) como:

$$(\partial_\mu + \partial_v^\Pi \partial_x^\nu (g_v \omega_\mu(x) + e A_\mu(x))) p^\mu \frac{\mathcal{F}}{m^*} = -m^* [\partial_v^\Pi \partial_x^\nu m^*(x)] \frac{\mathcal{F}}{m^*} . \quad (3.37)$$

Agora, usando as restrições:

$$\partial_\mu \omega^\mu = 0 \quad (3.38)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{condição de Lorenz} \quad , \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

conforme demonstrado no apêndice B.3 o seguinte comutador se anula:

$$[\partial_\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , p^\mu] = 0 \quad . \quad (3.41)$$

Usando o comutador anterior na equação (3.37), ficamos com:

$$[p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu \partial_x^\nu \omega^\mu + e p_\mu \partial_x^\nu A^\mu) \partial_\nu^\Pi + m^* (\partial_x^\nu m^*) \partial_\nu^\Pi] \frac{\mathcal{F}}{m^*} = 0 \quad . \quad (3.42)$$

De acordo com o apêndice B.2, fazendo a troca de variáveis (x, Π) por (x, p) , onde $p_\nu = \Pi_\nu - g_\nu w_\nu - eA_\nu$, a derivada ∂_x^μ deve ser trocada por:

$$\begin{aligned} [\partial_x^\mu \mathcal{F}(x^\mu, \Pi^\mu)] &= \\ &= [\partial_x^\mu \mathcal{F}(x, p)] - g_\nu (\partial_x^\mu w^\nu(x)) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p) - e (\partial_x^\mu A^\nu(x)) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p) \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

A derivada em relação ao momento canônico fica:

$$\partial_\mu^\Pi = \frac{\partial p_\nu}{\partial \Pi_\mu} \partial_\nu^p = \partial_\mu^p \quad . \quad (3.44)$$

Introduzindo as equações (3.43) e (3.44) na equação (3.42) ficamos com:

$$\begin{aligned}
& [p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu (\partial_x^\nu \omega^\mu - \partial_x^\mu \omega^\nu) + \\
& + e p_\mu (\partial_x^\nu A^\mu - \partial_x^\mu A^\nu)) \partial_\nu^p + m^* (\partial_x^\nu m^*) \partial_\nu^p] \frac{\mathcal{F}(x, p)}{m^*} = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

Esta última é a *equação de Vlasov* em sua forma manifestamente covariante:

$$[p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu \Omega^{\nu\mu} + e p_\mu F^{\nu\mu} + m^* (\partial_x^\nu m^*)) \partial_\nu^p] \frac{\mathcal{F}}{m^*} = 0 \quad , \tag{3.46}$$

onde $\Omega^{\nu\mu} = \partial_x^\nu \omega^\mu - \partial_x^\mu \omega^\nu$ e $F^{\nu\mu} = \partial_x^\nu A^\mu - \partial_x^\mu A^\nu$.

Podemos eliminar a variável p^0 da equação anterior utilizando a condição (3.36):

$$\begin{aligned}
p^2 &= (m^*)^2 \\
\mathcal{F} &= \Theta(p_0) \delta(p^2 - (m^*)^2) \Xi(\vec{r}, \vec{p}, t) \\
\rightarrow \quad \delta(x^2 - \alpha^2) &= \frac{1}{2x} [\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha)] \\
\Rightarrow \quad \mathcal{F} &= \frac{1}{2p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \Xi(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad , \tag{3.47}
\end{aligned}$$

onde a função Θ representa a seleção apenas de partículas com energia positiva (desconsiderando antipartículas) e $\Xi(\vec{r}, \vec{p}, t)$ é uma função independente de p^0 . Substituindo a equação anterior na equação (3.46), ficamos com:

$$\begin{aligned}
& [p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu \Omega^{\nu\mu} + e p_\mu F^{\nu\mu} + m^* (\partial_x^\nu m^*)) \partial_\nu^p] \times \\
& \times \frac{1}{2p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} = 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

que pode ser simplificada, pois:

$$\begin{aligned}
& \partial_{p_0} \left[\frac{1}{p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \right] = \\
& \frac{-2}{p_0^2} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} + \frac{1}{p_0} \partial_{p_0} \left[\Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \right] \\
& \rightarrow \frac{1}{p_0} \left[\partial_{p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \right] = \\
& \frac{1}{p_0} \delta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} + \left[\partial_{p_0} \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \right] \frac{1}{p_0} \Theta(p_0) \frac{\Xi}{m^*} \\
& \rightarrow \int \left[\frac{d}{dx} \delta(x) \right] f(x) dx = \int (-1) \delta(x) \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] dx \\
& \Rightarrow \frac{1}{p_0} \left[\partial_{p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \right] = \\
& \quad \frac{2}{p_0^2} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \\
& \Rightarrow \partial_{p_0} \left[\frac{1}{p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \right] = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

Onde estas operações são realizadas no integrando de uma integral sobre p_0 , que omitimos. Substituindo a igualdade anterior na equação (3.48), temos:

$$\begin{aligned}
& \left[p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu \Omega^{k\mu} + e p_\mu F^{k\mu} + m^* (\partial_x^k m^*)) \partial_k^p \right] \times \\
& \times \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 - (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad .
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Agora vamos calcular individualmente cada termo da equação (3.50).
O terceiro termo é a *força de Lorentz covariante* :

$$\begin{aligned}
F^{\nu\mu} &= \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \\
e p_\mu F^{k\mu} &= e F^{k\mu} p_\mu = e \begin{bmatrix} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} \\
&= e(p_0 \vec{E} + \vec{p} \times \vec{B}) \\
\vec{E} &= -\nabla \phi(\vec{r}, t) \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad .
\end{aligned} \tag{3.51}$$

O segundo termo fica:

$$\begin{aligned}
g_\nu p_\mu \Omega^{k\mu} &= g_\nu (p_0 \vec{C} + \vec{p} \times \vec{D}) \\
\vec{C} &= -\nabla \omega^0(\vec{r}, t) \quad \vec{D} = \nabla \times \vec{\omega}(\vec{r}, t) \quad .
\end{aligned} \tag{3.52}$$

E para o primeiro termo temos:

$$p_\mu \partial_x^\mu = p_0 \partial_t + \vec{p} \cdot \nabla . \quad (3.53)$$

Somando todos os termos ficamos com:

$$\begin{aligned} & \left[p_0 \partial_t + \vec{p} \cdot \nabla + \left(e(p_0 \vec{E} + \vec{p} \times \vec{B}) + g_v(p_0 \vec{C} + \vec{p} \times \vec{D}) + m^*(\nabla m^*) \right) \cdot \nabla_p \right] \times \\ & \quad \times \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \\ & = \left[\partial_t + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla + \left(e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + g_v(\vec{C} + \dot{\vec{r}} \times \vec{D}) + \frac{m^*}{p_0} (\nabla m^*) \right) \cdot \nabla_p \right] \times \\ & \quad \times \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \\ & = \left[\partial_t + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla + \left(e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + g_v(\vec{C} + \dot{\vec{r}} \times \vec{D}) + \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + (m^*)^2}} (\nabla m^*) \right) \cdot \nabla_p \right] \times \\ & \quad \times \Theta(\sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Mas, lembrando das equações (3.34) e (3.47):

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \int dp^0 \text{Sp} [\gamma^0 F] = 4 \int dp^0 \mathcal{V}^0 = \\ &= 4 \int dp^0 \frac{p^0}{m^*} \mathcal{F} = 4 \int dp^0 \frac{p^0}{m^*} \frac{1}{2p_0} \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \Xi \\ &= 2 \int dp^0 \Theta(p_0) \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} \\ &= 2 \Theta(\sqrt{p^2 + (m^*)^2}) \frac{\Xi}{m^*} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

A equação (3.48) pode ser reescrita como:

$$[\partial_t + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla + (\dot{\vec{p}} \cdot \nabla_p)] f(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0 \quad , \quad (3.56)$$

onde:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \left(e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + g_v(\vec{C} + \dot{\vec{r}} \times \vec{D}) + \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + (m^*)^2}} (\nabla m^*) \right) \quad , \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{p}}{p_0} \quad . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Então, na aproximação feita nesta seção, a equação (3.27) para os prótons fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(p)} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r f_{(p)} + \left[e \left(\vec{E} + (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \right) + g_v \left(\vec{C} + (\dot{\vec{r}} \times \vec{D}) \right) + \vec{F} \right] \cdot \nabla_p f_{(p)} = 0 \quad , \quad (3.58)$$

onde C e D são definidos na equação (3.52). Podemos fazer $e = 0$ na equação anterior e chegamos em uma equação para os nêutrons:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(n)} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r f_{(n)} + g_v \left[\left(\vec{C} + (\dot{\vec{r}} \times \vec{D}) \right) + \vec{F} \right] \cdot \nabla_p f_{(n)} = 0 \quad . \quad (3.59)$$

Na equação anterior utilizamos:

$$\vec{F} \equiv \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + (m^*)^2}} (\nabla m^*) \quad . \quad (3.60)$$

3.3 Função de Wigner no Equilíbrio Termodinâmico

De acordo com a definição (3.10) dada na seção 3.2, os colchetes $\langle \rangle$ denotam uma média estatística do sistema. Na mecânica estatística de equilíbrio, esta média é uma média sobre um ensemble de equilíbrio. Um ensemble é dito de equilíbrio se a densidade de probabilidade \mathcal{P} definida na seção 3.1 não depender explicitamente do tempo, ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.61)$$

Esta suposição implica que a função de distribuição de um corpo $f(\vec{r}, \vec{p})$ dada pela equação (3.20) deve ser independente do tempo. Consequentemente os valores médios, também são independentes do tempo. O *ensemble micro-canônico* é caracterizado por \mathcal{P} constante⁷ para microestados de uma dada energia e zero em caso contrário.

No caso da mecânica quântica, um ensemble conveniente para utilizarmos é o *ensemble grande canônico*. Para um sistema composto por férmions indistinguíveis, em equilíbrio com um reservatório térmico na temperatura T e com um reservatório de partículas com potencial químico μ o ensemble grande canônico implica [30] no seguinte peso estatístico n_λ :

$$n_\lambda = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} \quad , \quad (3.62)$$

onde $\beta = \frac{1}{T}$ e μ também é identificado como sendo a energia de Fermi do sistema E_F . Este peso é conhecido como peso estatístico de Fermi-Dirac. Note que não vamos considerar estados de energia negativa.

Nesta seção vamos calcular a função de Wigner para a matéria nuclear na aproximação \mathcal{L}_{HM} ⁸, no equilíbrio termodinâmico, ou seja, com a média $\langle \rangle$ dada pela equação (2.44) onde n_α é o peso de Fermi-Dirac. Usando os

⁷Esta definição é também conhecida como postulado das probabilidades iguais *a priori*.

⁸Matéria nuclear densa em um campo magnético forte na aproximação de Hartree. Veja seção 2.3.

espinores de Dirac para os nêutrons (2.47) e (2.48), de acordo com o apêndice D.1, a função de Wigner (3.21) fica:

$$f_{(n)}(\vec{p})_{(eq.)} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{\beta(E(p) - E_F)}} \quad . \quad (3.63)$$

A função $\mathcal{F}_{(n)}(p)_{(eq.)}$, equação (3.31), fica:

$$\mathcal{F}_{(n)}(p)_{(eq.)} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{m^*}{E^*} \frac{\delta(E^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E(p) - E_F)}} \quad . \quad (3.64)$$

Procedendo da mesma maneira, de acordo com o apêndice D.2, calculamos as funções $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$ e $\mathcal{F}_{(p)}(p)_{(eq.)}$, que ficam:

$$\begin{aligned} f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} &= \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \times \\ &\times \left[\frac{L_0(2b_3^2)}{1 + e^{\beta(E_0 - E_F)}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1 + e^{\beta(E_{l+1} - E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(p)}(p)_{(eq.)} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \frac{\delta(E_0^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_0 - E_F)}} \frac{m_{(p)}^*}{E_0^*} L_0(2b_3^2) + \\ &+ \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_{(p)}^*}{E_{l+1}^*} \frac{(-1)^l \delta(E_{l+1}^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_{l+1} - E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde $b_3^2 = \frac{1}{eB_0} (p_x^2 + p_y^2) = \frac{p_{\perp}^2}{eB_0}$ e $L_l(2b_3^2)$ é o polinômio de Laguerre de ordem

l com argumento $2b_3^2$.

Vamos representar graficamente a função de distribuição para os nêutrons $f_{(n)}(\vec{p})_{(eq.)}$ em função de $(p_x, p_y, p_z = 0)$, utilizando os seguintes parâmetros:

$m_{(n)}[\text{MeV}]$	$g_s \sigma_0[\text{MeV}]$	$E_F[\text{MeV}]$	$T[\text{MeV}]$
939	400	783	0,1

Tabela 3.1: Parâmetros utilizados no gráfico abaixo

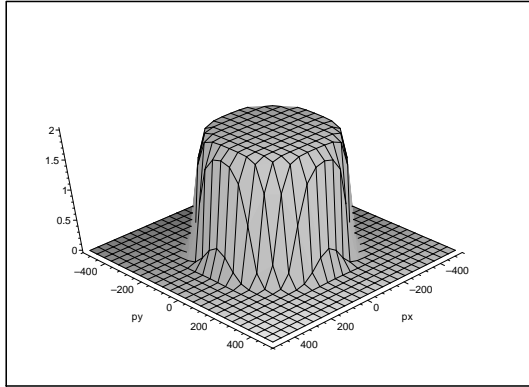


Figura 3.1: *Função de Wigner para os Nêutrons. As variáveis p_x e p_y dadas em MeV.*

Vemos que esta é idêntica a distribuição de partículas em um gás de Fermi [31]. Em um gás não interagente, as partículas são livres e suas funções de onda são ondas planas de acordo com equações (2.47) e (2.48). Se fizermos a integração sobre d^3p , nós obteremos uma densidade $\rho_{(n)}$ constante.

Na função de distribuição para os prótons $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$, podemos representar os termos do somatório sobre os níveis de Landau em um gráfico. Fazemos os gráficos de cada termo em função de $(p_x, p_y, p_z = 0)$. Utilizando os parâmetros dados pela tabela abaixo, temos os seguintes gráficos:

$m_{(n)}[\text{MeV}]$	$g_s \sigma_0[\text{MeV}]$	$E_F[\text{MeV}]$	$T[\text{MeV}]$	$B_0[\text{G}]$
939	400	607	10	10^{19}

Tabela 3.2: Parâmetros utilizados nos gráficos abaixo

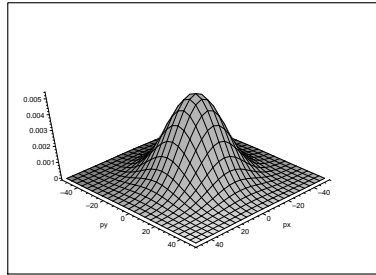


Figura 3.2: Termo de ordem zero na função de Laguerre contida na Função de Wigner para os Prótons. As variáveis p_x e p_y dadas em MeV.

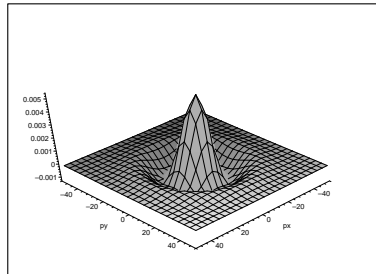


Figura 3.3: Termo de ordem 10 na função de Laguerre contida na Função de Wigner para os Prótons. As variáveis p_x e p_y dadas em MeV.

A figura 3.3 é um gráfico do termo de décima ordem na função de Laguerre contida na função $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$. O gráfico 3.4 apresentado abaixo é uma intersecção da curva apresentada em 3.3 com o plano $p_y = 0$, vemos que a função $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$ apresenta valores negativos para um certo conjunto de pontos p_x . Esta propriedade da função de Wigner é uma consequência do caráter ondulatório das partículas que compõem o sistema [32], portanto é um fenômeno quântico associado a função de distribuição $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$. Devido a este fenômeno não podemos interpretar $f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)}$ como sendo uma

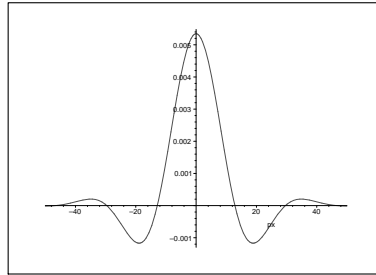


Figura 3.4: *Intersecção da curva anterior com o plano $p_y = 0$.*

densidade de probabilidades no espaço (\vec{r}, \vec{p}) , assim como fazemos com a função clássica 3.5 $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$. A função de Wigner é chamada de uma função de quase-probabilidade. O carácter negativo da função de Wigner tem sido alvo de experiências realizadas recentemente [33]. Nestas reconstrói-se a função de Wigner através de medidas experimentais e evidencia-se a conexão entre seu comportamento negativo e a interferência entre os pacotes de onda.

3.3.1 Tensor de Energia-Momento

De acordo com o teorema de Noether [34], a invariância das equações de movimento e da forma funcional da lagrangiana, quando submetidas a uma translação infinitesimal no espaço-tempo $x'_\mu \rightarrow x_\mu + \epsilon_\mu$, implicam na seguinte lei de conservação:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (3.67)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_i \partial_\nu q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu q_i)} \right) , \quad (3.68)$$

e é conhecido como *tensor de energia-momento*. Esta denominação é dada, pois a equação anterior implica na conservação do quadri vetor energia-momento P_ν :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T_{0\nu} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \left[\sum_i \pi_i \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} - g_{0\nu} \mathcal{L} \right] = \frac{\partial}{\partial t} P_\nu = 0 , \quad (3.69)$$

onde $P_\nu = (H, \vec{P})$.

Agora, substituindo a Lagrangiana \mathcal{L}_{0M} , equação (2.36), na equação (3.68) obtemos:

$$(T_{\mu\nu})_{0M} = i\bar{\Psi}_{(p)} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi_{(p)} + i\bar{\Psi}_{(n)} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi_{(n)} - \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) g_{\mu\nu} . \quad (3.70)$$

Este tensor é também chamado de canônico. Podemos expressar os termos envolvendo os campos $\Psi_{(p)}, \Psi_{(n)}$ deste tensor em termos da função da Wigner (3.33) [23]:

$$i\bar{\Psi}_{(p)} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi_{(p)} = \frac{4}{m_{(p)}^*} \int d^4p p_\mu p_\nu \mathcal{F}_{(p)}(x, p) + g_\nu \omega_\nu j_{\mu(p)} , \quad (3.71)$$

$$i\bar{\Psi}_{(n)}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}\Psi_{(n)} = \frac{4}{m_{(n)}^*}\int d^4p\, p_{\mu}p_{\nu}\mathcal{F}_{(n)}(x,p) + g_{\nu}\omega_{\nu}j_{\mu(n)} \quad . \quad (3.72)$$

Levando os dois últimos resultados na equação (3.70), ficamos com:

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu})_{0M} &= \frac{4}{m_{(p)}^*}\int d^4p\, p_{\mu}p_{\nu}\mathcal{F}_{(p)}(x,p) + \frac{4}{m_{(n)}^*}\int d^4p\, p_{\mu}p_{\nu}\mathcal{F}_{(n)}(x,p) + \\ &+ g_{\nu}\omega_{\nu}j_{\mu} - \left(\frac{1}{2}B_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2\right)g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.73)$$

A equação anterior pode ser interpretada como o fluxo de momento p_{ν} dos prótons através da superfície perpendicular a p_{μ} mais o fluxo de momento p_{ν} dos nêutrons através da superfície perpendicular a p_{μ} .

Para o sistema em equilíbrio termodinâmico dado na seção 3.3, as funções $\mathcal{F}_{(p)}(x,p)$ e $\mathcal{F}_{(n)}(x,p)$ são dadas pelas equação (3.64) e equação (3.66) respectivamente. Podemos notar na equação (3.66), que esta é anisotrópica na distribuição dos momentos, ou seja, a força exercida por este fluxo de momento sobre um elemento de área $da\hat{e}_a$ será dependente da orientação \hat{e}_a deste elemento de área. Este fato implica em uma pressão perpendicular P_{\perp} cinética de magnitude diferente da pressão P_{\parallel} cinética e paralela à orientação do campo magnético. Se nós computarmos a pressão exercida pela força de Lorentz P_M originada pela corrente diamagnética, denominada pressão magnética [36][37], as pressões P_{\perp} e P_{\parallel} vão se igualar. Esta é uma condição para o equilíbrio em um plasma [37]. Este resultado é consistente termodinamicamente, pois para um sistema em equilíbrio termodinâmico é preciso que a pressão⁹ seja isotrópica.

Na mecânica clássica dos meios contínuos, podemos reescrever o tensor de energia-momento para um sistema uniforme e em equilíbrio termodinâmico em função da densidade de energia ε e da pressão P . Vamos escolher um sistema de referência onde o fluido está em repouso, ou seja, onde a velocidade convectiva de um elemento de fluido seja $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Neste sistema o campo externo é $A^{\mu} = (0, 0, B_0x, 0)$, ou seja $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. De-

⁹A pressão [35] é uma variável de campo termodinâmico e precisa assumir o mesmo valor para cada parte do sistema.

finindo um quadrivetor unitário tipo espaço u' paralelo ao campo B , $u' \equiv (0, 0, 0, 1)$, podemos reescrever o tensor de energia-momento como [22],[21]:

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon u_\mu u_\nu - P_\perp \Delta_{\mu\nu} + P_\parallel u'_\mu u'_\nu, \quad (3.74)$$

onde $P_\parallel = P_\perp + P_M$ [36]. $\Delta_{\mu\nu}$ é o projetor em uma direção ortogonal a u , u' é definido por:

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu + u'_\mu u'_\nu. \quad (3.75)$$

Na próxima seção calcularemos cada um destes termos e esboçaremos uma equação de estado para este sistema.

3.3.2 Equação de Estado

Nesta subseção calculamos as equações de estado para a matéria nuclear simétrica, que é descrita pela aproximação \mathcal{L}_{0M} definida na seção 2.3. Utilizamos a parametrização dada pela tabela 2.1, onde consideramos que o nêutron tem a mesma massa do próton dada por M .

O estado macroscópico do sistema em equilíbrio fica determinado pelo conjunto das chamadas variáveis de estado do sistema. A equação termodinâmica que relaciona as variáveis de estado é conhecida como equação de estado do sistema. No presente caso, calcularemos uma equação que relaciona as variáveis ε e P . As variáveis de estados ρ_B , T e $\mu = E_F$ serão os parâmetros das variáveis ε e P . As variáveis ε e P são dadas pelos elementos de matriz do tensor $T_{\mu\nu}$. Na aproximação \mathcal{L}_{0M} , de acordo com a equação (3.73), elas são dadas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= T_{00} = \frac{4}{m_{(p)}^*} \int d^4 p \, p_0 p_0 \mathcal{F}_{(p)}(p)_{eq.} + \frac{4}{m_{(n)}^*} \int d^4 p \, p_0 p_0 \mathcal{F}_{(n)}(p)_{eq.} \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
P &= T_{zz} = T_{xx} + P_M = \frac{4}{m_p^*} \int d^4 p \, p_{\parallel} p_{\parallel} \mathcal{F}_{(p)}(p)_{eq.} + \frac{4}{m_n^*} \int d^4 p \, p_z p_z \mathcal{F}_{(n)}(p)_{eq.} \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
\end{aligned} \tag{3.77}$$

De acordo com o apêndice E, as integrais acima podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l E_{l(p)}^* n_{l(p)} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \, E_{(n)}^* n_{(n)}(p) \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{E_{l(p)}^*} n_{l(p)} + \frac{2}{3(2\pi)^3} \int d^3 p \, \frac{p^2}{E_{(n)}^*} n_{(n)}(p) \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
\end{aligned} \tag{3.79}$$

onde:

$$n_{(i)} = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{(i)} - E_F)}} \quad , \quad i = p, n \quad . \tag{3.80}$$

Sistema à Temperatura Nula

As equações para densidade de energia e pressão calculadas na seção anterior podem ser simplificadas e resolvidas analiticamente se efetuarmos o limite $T \rightarrow 0$. Efetuando este limite na distribuição de Fermi-Dirac 3.80, temos o seguinte resultado:

$$\lim_{T \rightarrow 0} [n_{(i)}] = \theta(E_{(i)} - E_{F(i)}) \quad , \quad i = p, n \quad , \quad (3.81)$$

onde $E_{F(i)}$ é a energia de Fermi do sistema formado pelas partículas de espécie (i) , ou seja, a energia do nível mais alto ocupado por uma partícula de espécie (i) . De acordo com o apêndice E.1, ao efetuarmos o limite $T \rightarrow 0$, as equações (3.78) e (3.79) adquirem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l(m_{(p)}^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} + \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] + \\ &+ \frac{m_{(n)}^{*4}}{(\pi)^2} \left[\frac{p_F}{4m_{(n)}^*} Y^3 - \frac{p_F}{8m_{(n)}^*} Y - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m_{(n)}^*} + Y \right) \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l(m_{(p)}^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} - \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] + \\ &+ \frac{m_{(n)}^{*4}}{24(\pi)^2} \left[\frac{2p_F}{m_{(n)}^*} Y^3 - \frac{5p_F}{m_{(n)}^*} Y + \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m_{(n)}^*} + Y \right) \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Onde $X_l = \frac{p_{\parallel F}}{\sqrt{m_{(p)}^{*2} + 2leB_0}}$, $Y = \sqrt{\frac{p_F^2}{m_{(n)}^{*2}} + 1}$. N_F é o último nível de Landau ocupado pelos prótons e é relacionado com o momento paralelo de Fermi dos prótons $p_{\parallel F}$ e a energia de Fermi $E_{F(p)}$ através da seguinte equação:

$$E_{F(p)} = \sqrt{p_{\parallel F}^2 + m_{(p)}^{*2}} + 2N_F eB_0 \quad . \quad (3.84)$$

Então, para uma determinada energia de Fermi finita $E_{F(p)}$, N_F é tomado [5] como sendo o número inteiro, na equação acima, que precede o primeiro valor negativo de $p_{\parallel F}^2$.

Os campos ω_0 e σ_0 podem ser calculados através das equações de movimento (2.31). De acordo com o apêndice E.1 e a equação (2.31) o campo ω^0 é dado por:

$$\omega_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B = \frac{g_v}{m_v^2} \left(\frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l p_{\parallel F}(N_F) + \frac{1}{3\pi^2} p_F^3 \right) \quad . \quad (3.85)$$

Para matéria nuclear simétrica no modelo $\sigma - \omega$, a massa de próton e do nêutron são consideradas iguais e portanto a definição da massa efetiva implica em $\sigma_0 = \frac{M-M^*}{g_s}$. Onde M é a massa do próton ou do nêutron, dado pela tabela 2.1. Utilizando a equação (2.31), podemos eliminar a variável σ_0 e massa efetiva pode ser reescrita como:

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s \quad . \quad (3.86)$$

Utilizando o valor de ρ_s à temperatura nula calculado no apêndice E.1, ficamos com:

$$\begin{aligned}
M^* &= M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l M^* \ln \left[X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right] + \\
&- \frac{1}{2\pi^2} M^{*2} \left[\frac{p_F}{M^*} Y - \ln \left(\frac{p_F}{M^*} + Y \right) \right] .
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Então, para eliminar a massa efetiva M^* das equações para densidade de energia e pressão, precisamos resolver a equação autoconsistente acima.

Para matéria nuclear simétrica as densidades de prótons e nêutrons devem ser iguais. Esta imposição implica na seguinte relação entre p_F , $p_{\parallel F}$ e N_F :

$$\begin{aligned}
\rho_{(p)} &= \rho_{(n)} \Rightarrow \rho_B = 2\rho_{(n)} \\
\frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l p_{\parallel F}(N_F) &= \frac{1}{3\pi^2} p_F^3 .
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Assim, para determinado nível de Landau, podemos encontrar $p_{\parallel F}$ como função de p_F . Para os primeiros níveis de Landau N_F temos:

$$\begin{aligned}
N_F &= 0 \Rightarrow p_{\parallel F} = \frac{2}{3eB_0} p_F^3 , \\
N_F &= 1 \Rightarrow p_{\parallel F} = \frac{2}{9eB_0} p_F^3 , \\
N_F &= 2 \Rightarrow p_{\parallel F} = \frac{2}{15eB_0} p_F^3 , \\
&\vdots \\
N_F &= j \Rightarrow p_{\parallel F} = \frac{2}{(3+6j)eB_0} p_F^3 .
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Agora, podemos implementar um algoritmo simples que resolve a equação autoconsistente (3.87) e representar graficamente as equações de estado $P \times \varepsilon$, $\varepsilon \times \rho_B$ e $P \times \rho_B$. Utilizamos a parametrização dada pela tabela

2.1, traçamos os gráficos para diferentes regimes de magnitude para B_0 e diferentes níveis máximos de Landau N_F .

Na confecção dos gráficos é conveniente redefinir a unidade do campo magnético, deixando-a adimensional através da introdução do campo magnético crítico para os prótons B_c . B_c é o campo onde a energia ciclotron clássica¹⁰ $\hbar w_c$ se iguala a energia relativística de repouso $m_p c^2$:

$$B_c = \frac{m_p^2 c^3}{e \hbar} = 1,49 \times 10^{20} \text{G} . \quad (3.90)$$

Então o termo magnético eB_0 pode ser reescrito como $m_{(p)}^2 c^4 B^*$, onde B^* é uma quantidade adimensional dada por $B^* = \frac{B}{B_c}$ e B tem como unidade o *Gauss*.

¹⁰Este é encontrada, quando tomamos o limite clássico da frequência ciclotron definida na seção 4.1, resultando em $w_c = \frac{eB}{m_p c}$.

Para a pressão em função da densidade de energia temos as seguintes curvas:

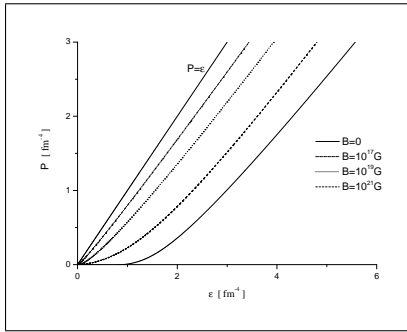


Figura 3.5: Pressão versus densidade de energia para $l = 0$

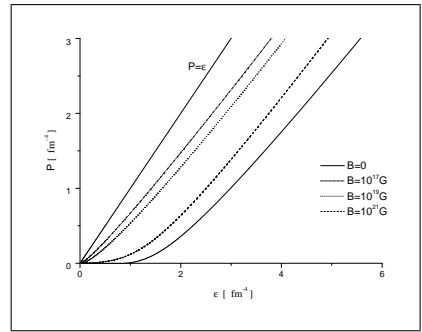


Figura 3.6: Pressão versus densidade de energia para $l = 3$

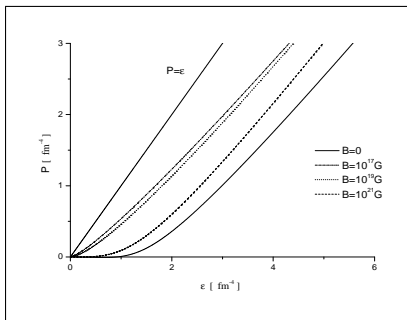


Figura 3.7: Pressão versus densidade de energia para $l = 15$

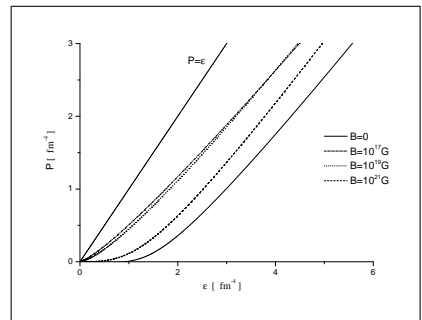


Figura 3.8: Pressão versus densidade de energia para $l = 30$

Para a pressão e a densidade de energia em função da densidade bariônica temos as seguintes curvas:

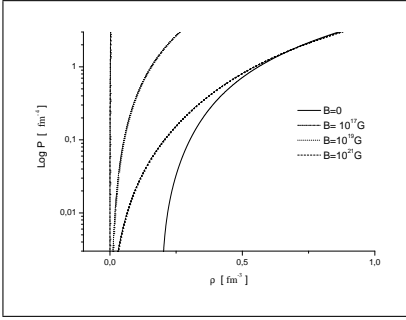


Figura 3.9: Pressão versus densidade bariônica para $l = 0$

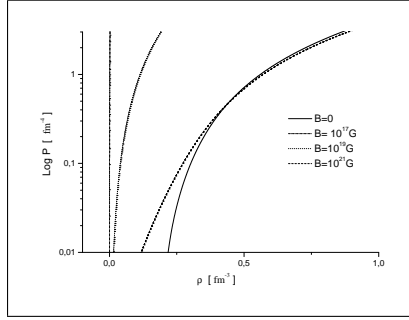


Figura 3.10: Pressão versus densidade de bariônica para $l = 3$

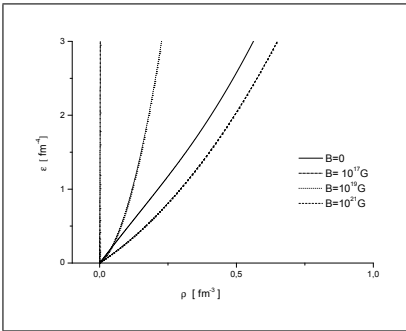


Figura 3.11: Densidade de energia versus densidade bariônica para $l = 0$

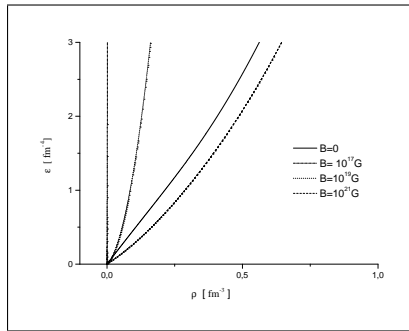


Figura 3.12: Densidade de energia versus densidade bariônica para $l = 3$

As figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 mostram curvas da pressão versus a densidade de energia para diferentes valores de magnitude do campo magnético B_0 e diferentes níveis de Landau máximos N_F ocupados pelos prótons do sistema. A curva B_0 é uma curva extraída do modelo $\sigma - \omega$ sem campo magnético. A reta $P = \varepsilon$ é o limite causal do sistema, ou seja, para curvas acima desta reta a velocidade do som é maior que a velocidade da luz neste meio e para curvas abaixo desta reta a velocidade do som é menor que a velocidade da luz satisfazendo assim o princípio da causalidade. Estas duas curvas que acabamos de citar servem para testarmos a validade das equações de estado. Para "boas curvas", é necessário que elas estejam abaixo da reta $P = \varepsilon$ e que no limite $N_F \rightarrow \infty$ simultaneamente com $B_0 \rightarrow 0$ elas se aproximem da curva com $B_0 = 0$. Observamos que isto acontece em nossas curvas. As figuras 3.9, 3.10 mostram curvas da pressão (em escala logarítmica) versus a densidade bariônica para $N_F = 0$ e $N_F = 3$.

4 TEORIA DA RESPOSTA LINEAR

De acordo com a dedução feita na subseção 3.2.2, no limite clássico e em um sistema de spin saturado, a evolução temporal das funções de Wigner $f_{(p),(n)}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ são dadas pelas equações de Vlasov (3.58) e (3.59). O limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ não é tomado sobre $f_{(p),(n)}$, ele é tomado apenas sobre os operadores que atuam sobre $f_{(p),(n)}$. A função $f_{(p),(n)}$ é uma média estatística quântica, e carrega informação quântica. Por tanto, a equação de Vlasov cuja função de distribuição de partículas $f_{(p),(n)}$ é a função de Wigner, pode ser entendida como uma aproximação semi-clássica para a dinâmica do problema.

A equação de Vlasov é a equação que descreve a evolução temporal, na ausência de colisões, da função de distribuição de um corpo(elétrons e íons) na teoria dos plasmas. Esta equação é uma ferramenta para o cálculo da função de distribuição $f_{e,i}$ para regimes onde o sistema se encontra fora do equilíbrio termodinâmico(Seção 3.3). Na teoria dos plasmas clássicos, para sistemas tirados do equilíbrio através de um impulso $f_{per.}$, onde $f_{per.} \ll f_{eq.}$ e $f_{eq.}$ é uma distribuição Maxwelliana¹, podemos resolver a equação de Vlasov linearizada analiticamente. A equação de Vlasov linearizada implica [36] em fenômenos físicos lineares exclusivos do plasma, como o amortecimento de Landau, amortecimento cíclotron, modos normais de Bernstein, modos normais de Langmuir, modos normais de Van Álfven e outros. Estas predições são amplamente confirmadas em experimentos envolvendo plasmas controlados em laboratórios [38][39].

Neste capítulo, procuramos demonstrar a existência de fenômenos análogos aos citados no parágrafo anterior, mas agora, ocorrendo na matéria nuclear. Para isso, vamos proceder de maneira similar ao que é feito na teoria clássica. Vamos considerar o sistema inicialmente em equilíbrio descrito pelas funções (3.63) e (3.65). Aplicamos neste sistema uma perturbação de pequena magnitude $f_{per.}$ e resolveremos a equação de Vlasov perturbada re- tendo apenas termos de perturbação lineares. Na próxima seção, calculamos a relação de dispersão para ondas eletrostáticas longitudinais se propagando na matéria nuclear. Estes modos de oscilação são uma generalização quântica e relativística dos modos de Bernstein mencionados no parágrafo anterior.

¹ Denominamos de Maxwelliana a curva dada por : $f(\vec{r}, \vec{v}) = \rho(\vec{r})(\beta m)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2}\beta v^2}$.

4.1 Modos de Bernstein na Matéria Nuclear

Em 1958 [6], Bernstein resolveu a equação de Vlasov linearizada para um plasma de elétrons em um campo magnético forte, uniforme e externo. Nesta resolução, ele utiliza como perturbação ondas eletrostáticas longitudinais se propagando em uma direção perpendicular ao campo magnético. A relação de dispersão para estas ondas são conhecidas como modos de Bernstein. Nesta seção vamos proceder de maneira similar à realizada por Bernstein [6] e outros autores [36][37], mas agora, trabalhando com um sistema quântico e relativístico (dado pela função de Wigner).

Vamos calcular a resposta $f_{per.}$ e a relação de dispersão para uma perturbação externa do tipo $E_{per.} \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ se propagando na matéria nuclear simétrica em equilíbrio descrita pelas funções de Wigner 3.63 e 3.65. Consideramos que a perturbação é uma onda plana longitudinal se propagando perpendicularmente ao campo magnético externo \vec{B}_0 , ou seja, escolhendo um sistema de coordenadas cartesianas onde \vec{B}_0 está alinhado com o eixo \hat{e}_3 temos que $\vec{E}_{per.} = E_y \hat{e}_2 e^{i(k_y y - \omega t)}$. Vamos considerar que a força \vec{p} que atua sobre a função de Wigner é composta apenas pela perturbação elétrica $e\vec{E}_{per.}$ e pela força originada pelo campo magnético externo $e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0)$, desprezando assim as forças que têm como origem a interação forte. Então, nesta aproximação a distribuição de nêutrons permanece inalterada e resolveremos apenas a equação (3.58) para os prótons:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(p)} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r f_{(p)} + \left[e \left(\vec{E}_{per.} + (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0) \right) \right] \cdot \nabla_p f_{(p)} = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Agora, substituindo $f = f_{eq.} + f_{per.}$, omitindo o índice (p) e retendo apenas termos lineares nas perturbações ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{per.} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r f_{per.} + e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_p f_{per.} + e\vec{E}_{per.} \cdot \nabla_p f_{eq.} = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}f_{per.} + e\vec{E}_{per.} \cdot \nabla_p f_{eq.} = 0 \quad ,$$

$$\text{onde} \quad \frac{d}{dt}f_{per.} = \frac{\partial}{\partial t}f_{per.} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r f_{per.} + (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_p f_{per.} \quad .$$
(4.3)

A primeira equação pode ser integrada no tempo ao longo da órbita clássica das partículas, resultando em:

$$f_{per.}(t) - f_{per.}(t_0) = - \int_{t_0}^t dt' e\vec{E}_{per.} \cdot \nabla_p f_{eq.} \quad , \quad (4.4)$$

onde a integral também deve ser efetuada sobre a órbita clássica das partículas. Para partículas relativísticas em um campo magnético uniforme, a dinâmica é dada por $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0$ que tem como solução as seguintes órbitas [40]:

$$\begin{aligned} y(t') - y(t) &= r_L \left\{ \sin \left[w_c(t' - t) + \phi \right] - \sin \phi \right\} \quad , \\ x(t') - x(t) &= -r_L \left\{ \cos \left[w_c(t' - t) + \phi \right] - \cos \phi \right\} \quad , \end{aligned}$$
(4.5)

onde $r_L = \frac{p_{\perp}}{eB_0}$ é o raio de Larmor e $w_c = \frac{eB_0}{p_0}$ é a frequência ciclotron que é constante ao longo da órbita. Introduzindo a perturbação $\vec{E}_{per.} = E_y \hat{e}_2 e^{ik_y y(t') - i\omega t'}$ e a órbita $y(t')$ dada pela equação anterior, a equação (4.4) fica:

$$\begin{aligned} f_{per.}(t) - f_{per.}(t_0) &= \\ &= -eE_y \int_{t_0}^t e^{-ik_y r_L \sin \phi} e^{ik_y y(t)} e^{\left[ik_y r_L \left(\sin(w_c(t' - t) + \phi) \right) - i\omega t' \right]} \left(\frac{\partial}{\partial p_y} f_{eq.} \right) dt' \quad . \end{aligned}$$
(4.6)

Introduzindo agora a variável $\tau = t' - t$, fazendo $t_0 \rightarrow \infty$ no limite inferior e considerando que $f_{per.}(t)$ é amortecida, ou seja se anula quando $t \rightarrow \infty$, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$f_{per.}(t) = -eE_y e^{ik_y y(t) - i\omega t} \int_{-\infty}^0 e^{-ik_y r_L \sin\phi} e^{[ik_y r_L (\sin(w_c \tau + \phi)) - i\omega \tau]} \left(\frac{\partial}{\partial p_y} f_{eq.} \right) d\tau . \quad (4.7)$$

Podemos simplificar o integrando usando a função geradora das funções de Bessel(equação (9.1.41) da referência [41]) e a derivada em coordenadas cilíndricas:

$$e^{ik_y r_L \sin(w_c \tau + \phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{i(w_c \tau + \phi)} \right)^n J_n(k_y r_L)$$

$$\frac{\partial f_{eq.}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{eq.}}{\partial p_{\perp}} = \cos(w_c \tau + \phi) \frac{\partial f_{eq.}}{\partial p_{\perp}} . \quad (4.8)$$

Com a utilização destas duas últimas relações, o lado direito da equação (4.6) fica:

$$\begin{aligned} & -eE_y e^{ik_y y(t) - i\omega t} \int_{-\infty}^0 \sum_{n,m=-\infty}^{n,m=\infty} \left(e^{i(w_c \tau + \phi)} \right)^n J_n(k_y r_L) (e^{-i\phi})^m J_m(k_y r_L) \times \\ & \times e^{-i\omega \tau} \cos(w_c \tau + \phi) \left(\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{eq.} \right) d\tau \\ = & -\frac{e}{2} E_y e^{ik_y y(t) - i\omega t} \int_{-\infty}^0 \sum_{n,m=-\infty}^{n,m=\infty} \left(e^{i(n+1)(w_c \tau + \phi)} + e^{i(n-1)(w_c \tau + \phi)} \right) \times \\ & \times e^{-i\omega \tau} J_n(k_y r_L) J_m(k_y r_L) e^{-im\phi} \left(\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{eq.} \right) d\tau \\ = & -\frac{e}{2} E_y e^{ik_y y(t) - i\omega t} \sum_{n,m=-\infty}^{n,m=\infty} \Lambda_{m,n} J_n(k_y r_L) J_m(k_y r_L) e^{-im\phi} \left(\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{eq.} \right) d\tau , \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\Lambda_{m,n}$ é dado por:

$$\Lambda_{m,n} = \left[\frac{e^{i(n+1)\phi} e^{(i(n+1)w_c - iw)\tau}}{(i(n+1)w_c - iw)} + \frac{e^{i(n-1)\phi} e^{(i(n-1)w_c - iw)\tau}}{(i(n-1)w_c - iw)} \right]_{-\infty}^0. \quad (4.10)$$

Se tivermos uma onda amortecida, então $w = w_r + i\zeta$ com $\zeta > 0$. Substituindo os limites acima, e usando uma onda amortecida, temos:

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,n} &= \left[\frac{e^{i(n+1)\phi} e^{(i(n+1)w_c - iw_r)\tau} e^{-\zeta\tau}}{(i(n+1)w_c - iw)} + \frac{e^{i(n-1)\phi} e^{(i(n-1)w_c - iw_r)\tau} e^{-\zeta\tau}}{(i(n-1)w_c - iw)} \right]_{-\infty}^0 \\ \Lambda_{m,n} &= \left[\frac{e^{i(n+1)\phi}}{(i(n+1)w_c - iw)} + \frac{e^{i(n-1)\phi}}{(i(n-1)w_c - iw)} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ainda, podemos simplificar $\Lambda_{m,n}$ fazendo uso da relação de recorrência $J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x)$ (equação (9.1.27) da referência [41]):

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(k_y r_L) \Lambda_{m,n} &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(k_y r_L) \left[\frac{e^{i(n+1)\phi}}{(i(n+1)w_c - iw)} + \frac{e^{i(n-1)\phi}}{(i(n-1)w_c - iw)} \right] \\ &= \sum_{v=-\infty}^{v=\infty} \frac{e^{iv\phi}}{i(vw_c - w)} [J_{v-1}(k_y r_L) + J_{v+1}(k_y r_L)] \\ &= \sum_{v=-\infty}^{v=\infty} \frac{e^{iv\phi}}{i(vw_c - w)} \frac{2v}{k_y r_L} J_v(k_y r_L). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Levando o resultado (4.11) e o (4.8) na equação (4.6), chegamos no seguinte resultado para a perturbação $f_{per.}$:

$$f_{per.}(t) = -eE_y e^{ik_y y(t) - i\omega t} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=\infty} \frac{e^{i(n-m)\phi}}{i(nw_c - w)} \frac{n}{k_y r_L} J_n(k_y r_L) J_m(k_y r_L) \frac{\partial f_{eq.}}{\partial p_{\perp}}. \quad (4.13)$$

Agora vamos calcular a relação de dispersão utilizando a equação de Poisson:

$$ik_y E_{per.} = \frac{e}{\epsilon_0} \int f_{per.} d\mathbf{p} = \frac{e}{\epsilon_0} \int f_{per.} dp_{\parallel} p_{\perp} dp_{\perp} d\phi \quad . \quad (4.14)$$

Substituindo $f_{per.}$ (equação (4.12)) na equação anterior e notando que a integral sobre ϕ pode ser resolvida dando $\int d\phi e^{i(m-n)\phi} = 2\pi\delta_{mn}$, a equação anterior fica:

$$k_y^2 = eB_0 \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(nw_c - w)} \int [J_n(k_y r_L)]^2 \frac{\partial f_{eq.}}{\partial p_{\perp}} dp_{\parallel} dp_{\perp} \quad . \quad (4.15)$$

4.1.1 Sistema à Temperatura Nula e no Primeiro Nível de Landau

Nesta subseção consideramos o sistema à temperatura nula e ocupando apenas o primeiro nível de Landau ($n=0$). Assim a relação de dispersão (4.14) pode ser simplificada e representada graficamente.

A matéria nuclear composta por prótons no equilíbrio termodinâmico é descrita pela função de Wigner (3.65):

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} = \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \times \left[\frac{L_0(2b_3^2)}{1 + e^{\beta(E_0 - E_F)}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1 + e^{\beta(E_{l+1} - E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \right] \quad , \quad (4.16)$$

onde $b_3^2 = \frac{1}{eB_0}(p_x^2 + p_y^2) = \frac{1}{eB_0}p_\perp^2$. À temperatura nula a expressão anterior resulta em:

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} = \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \times \left[L_0(2b_3^2)\theta(E_0 - E_F) + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \theta(E_{l+1} - E_F)(L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \right]. \quad (4.17)$$

Se considerarmos apenas o primeiro termo do somatório ($l=0$) e substituímos o polinômio de Laguerre, a equação anterior fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} &= \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-\frac{1}{eB_0}p_\perp^2} \left[\theta(E_0 - E_F) + \theta(E_1 - E_F) \left(1 - \left(1 - \frac{2}{eB_0}p_\perp^2\right)\right) \right] \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-\frac{1}{eB_0}p_\perp^2} \left[\theta(E_0 - E_F) + \theta(E_1 - E_F) \frac{2}{eB_0}p_\perp^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Agora, substituindo a equação (4.17) na equação (4.14), a integral sobre p_\perp pode ser resolvida facilmente resultando em $\int dp_\parallel \theta(E_0 - E_F) \equiv 2p_{\parallel 0F}$. Assim, a equação (4.14) resulta em:

$$\begin{aligned} k_y^2 &= \frac{2e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(nw_c - w)} \int_0^\infty p_\perp (J_n(k_y r_L))^2 e^{-\frac{p_\perp^2}{eB_0}} (2p_{\parallel 1F} - p_{\parallel 0F}) dp_\perp + \\ &- \frac{2e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(nw_c - w)} \int_0^\infty \frac{2}{eB_0} p_{\parallel 1F} (J_n(k_y r_L))^2 e^{-\frac{p_\perp^2}{eB_0}} p_\perp^3 dp_\perp. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora, notando que $(J_n(k_y r_L))^2 = (J_{-n}(k_y r_L))^2$ e que o termo com $n = 0$ se anula, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned}
k_y^2 &= \frac{4e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} \int_0^{\infty} p_{\perp} (J_n(k_y r_L))^2 e^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB_0}} (p_{\parallel 0F} - 2p_{\parallel 1F}) dp_{\perp} + \\
&+ \frac{4e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} \int_0^{\infty} \frac{2}{eB_0} p_{\parallel 1F} (J_n(k_y r_L))^2 e^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB_0}} p_{\perp}^3 dp_{\perp} .
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

A equação acima pode ser simplificada com a ajuda da seguinte identidade [42]:

$$\int_0^{\infty} (J_n(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2c^2}} x dx = c^2 e^{-c^2} I_n(c^2) \quad , \quad n > -1
\tag{4.21}$$

onde $I_n(c^2)$ é a função de Bessel modificada de ordem n . $p_{\parallel 0F}$ e $p_{\parallel 1F}$ são os momentos de Fermi paralelos onde $N_F = 0$ e $N_F = 1$ respectivamente. Usando a identidade acima a equação (4.19) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
k_y^2 &= \frac{2e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} eB_0 p_{\parallel 0F} e^{-\frac{k_y^2}{eB_0}} I_n\left(\frac{k_y^2}{eB_0}\right) + \\
&+ \frac{2e^2}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} p_{\parallel 1F} e^{-\frac{k_y^2}{eB_0}} k_y^2 \left[I_n\left(\frac{k_y^2}{eB_0}\right) + \frac{1}{2} (I_{n-1}\left(\frac{k_y^2}{eB_0}\right) + I_{n+1}\left(\frac{k_y^2}{eB_0}\right)) \right] .
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da igualdade da equação acima é semelhante ao calculado por Bernstein [6],[36] para um plasma clássico não relativístico. O segundo termo consiste em uma correção quântica e relativística para os modos de Bernstein. Podemos reescrever a equação (4.21) da seguinte maneira:

$$k_y^2 = \frac{2e^2 w_c}{\pi^2 \epsilon_0} \alpha(w, \lambda)
\tag{4.23}$$

onde $\lambda = \frac{k_y^2}{2eB_0}$ e a função $\alpha(w, \lambda)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \alpha(w, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} eB_0 p_{\parallel 0F} e^{-\lambda} I_n(\lambda) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 w_c}{(w^2 - n^2 w_c^2)} 2eB_0 p_{\parallel 1F} e^{-\lambda} \lambda \left[I_n(\lambda) + \frac{1}{2} (I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda)) \right] . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Os momentos de Fermi paralelos $p_{\parallel 1F}$ e $p_{\parallel 0F}$ podem ser calculados com auxílio da equação (3.89).

$$\begin{aligned} N_F &= 0 \Rightarrow p_{\parallel 0F} = \frac{2}{3eB_0} p_F^3 , \\ N_F &= 1 \Rightarrow p_{\parallel 1F} = \frac{2}{9eB_0} p_F^3 . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Agora, representamos graficamente a função α em função de $\frac{w}{w_c}$, para $\lambda = 1$ e usando os parâmetros mostrados na tabela abaixo.

$\rho_{(p)} [\text{fm}^{-3}]$	$B_0 [\text{G}]$	λ
0,153	10^{19}	1

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados nos gráficos abaixo

A equação (4.22) implica que a função $\alpha(w, \lambda)$ é maior que zero. Então, a figura 4.1 mostra regiões proibidas para w , ou seja, as regiões onde α assume valores negativos.

Podemos analisar a relação de dispersão dada pela equação (4.21) efetuando os limites para $k_y \rightarrow \infty$ e para $k_y \rightarrow 0$. No limite $k_y \rightarrow \infty$ a frequência w assume os valores múltiplos da frequência ciclotron $w = nw_c$, pois o denominadores da fração na equação (4.21) deve se anular. No limite $k_y \rightarrow 0$, a função de Bessel modificada pode ser substituída por $I_n(\frac{k_y^2}{2eB_0}) = \frac{(\frac{k_y^2}{2eB_0})^n}{n!}$.

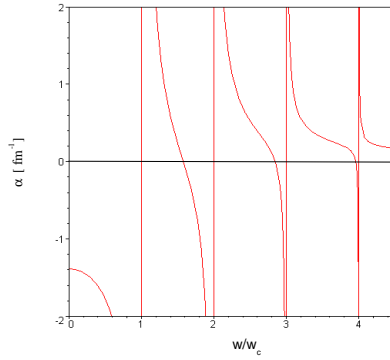


Figura 4.1: *Regiões proibidas para w .*

Substituindo esta propriedade na equação (4.21), no limite $k_y \rightarrow 0$, apenas o termo com $n = 1$ não se anula. Neste limite a equação (4.21) fica:

$$w^2 = \underbrace{\frac{e^2 w_c}{\pi^2 \epsilon_0} p_{\parallel 0F}}_{\equiv w_{pq}^2} + w_c^2 \equiv w_H^2 . \quad (4.26)$$

Onde w_H é denominada frequência híbrida superior, pois é uma mistura da frequência w_c com a frequência w_{pq} . A representação gráfica da relação de dispersão para os quatro primeiros níveis, fazendo $\frac{w}{w_c}$ versus $k_y r_l$ e escolhendo w_H entre o primeiro e o segundo nível harmônico, é dada por:

O gráfico acima apresenta quatro frequências harmônicas da frequência ciclotron (linhas tracejadas). As linhas contínuas apresentam as frequências das ondas eletrostáticas se propagando na matéria nuclear perpendicularmente à direção do campo magnético. Estas ondas são chamadas de ondas de Bernstein.

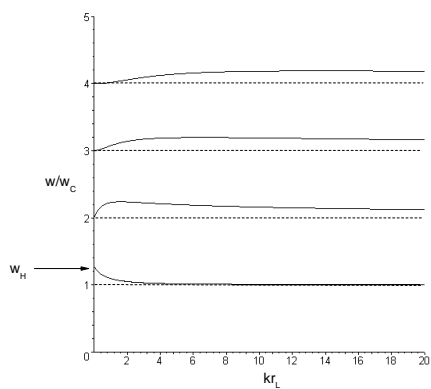


Figura 4.2: Relação de dispersão w/w_c versus $k_y r_L$.

5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, realizamos um estudo sobre a matéria nuclear simétrica, à temperatura nula e imersa em um campo magnético forte. Calculamos algumas propriedades da matéria em equilíbrio e fora do equilíbrio. Para que isto fosse possível, desenvolvemos ao longo do capítulo 3 um estudo sobre uma teoria de transporte baseada na função de distribuição de Wigner. Este estudo é feito de forma detalhada, de modo que, toda a teoria necessária para a realizações de predições sobre equações de estado, respostas lineares e modos de oscilação esta presente no texto desta dissertação. A teoria de transporte desenvolvida neste trabalho será generalizada em trabalhos futuros. Estes trabalhos poderão descrever a matéria estelar realista no lugar da matéria nuclear simétrica. As predições feitas neste trabalho estão expostas na subseção 3.3.2 e na subseção 4.1.1.

Na seção 3.3.2, calculamos as equações de estado para matéria nuclear em equilíbrio e esboçamos seus gráficos. Na literatura encontramos estas curvas para a matéria estelar[5] composta por prótons, nêutrons e elétrons em equilíbrio beta. O nosso modelo não considera elétrons e considera a matéria nuclear como sendo simétrica, mas mesmo assim quando comparados com as curvas para matéria estelar do autor [5], suas curvaturas são semelhantes. Em trabalhos futuros calcularemos estas curvas para a matéria estelar, onde incluiremos os elétrons e outras partículas de campo no modelo.

No capítulo 4, calculamos a resposta linear a uma perturbação externa elétrica, longitudinal, periódica e se propagando em uma direção perpendicular ao campo magnético. Usamos então esta resposta para calcular a relação de dispersão à temperatura nula e para os prótons concentrados no primeiro nível de Landau. Calculamos a frequência superior híbrida w_H , que é uma generalização quântica e relativística para a frequência superior híbrida calculada para um plasma clássico[37], [6] imerso em um campo magnético forte. Esta frequência é denominada de superior porque o ângulo de 90° , que é o ângulo entre a direção de propagação da perturbação e a direção do campo magnético, é tomado com sendo o limite superior. Também podemos calcular a frequência w_H para ângulos inferiores a 90° , quando o ângulo for 0° a frequência w_H é denominada de inferior. Esta frequência é denominada de híbrida porque em um plasma clássico ela é dada por $w_H = w_p + w_c$, onde $w_p = (\frac{\rho e^2}{\epsilon_0 m})^{\frac{1}{2}}$ é a frequência característica do plasma clássico. Esta frequência característica é obtida para um plasma sofrendo influência apenas da perturbação elétrica, sem a presença de campos externos σ e ω .

Na subseção 4.1.1 encontramos a frequência característica análoga ao caso clássico, esta é dada por :

$$w_{pq} = \left[\frac{e^2 w_c}{\pi^2 \epsilon_0} P_{||0F} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (5.1)$$

Na teoria clássica, a figura 4.2 é conhecida como sendo a relação de dispersão para as ondas de Bernstein. A figura 4.1 apresenta as regiões proibidas para w . Estas duas curvas tem um comportamento semelhante as curvas calculadas para um plasma clássico[36],[37].

5.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

O estudo desenvolvido neste trabalho pode servir como ponto de partida para pesquisas futuras. Podemos generalizar a teoria desenvolvida no capítulo 3. Esta generalização pode ser feita para englobar outras partículas, tais como elétrons, mésons π , híperons e outras que são levadas em consideração em modelos mais realistas que o modelo $\sigma - \omega$ apresentado no capítulo 2. Assim podemos calcular equações de estado para a matéria estelar mais realista. Também podemos, não usando as aproximações feitas na subseção 3.2.2, levar em conta a influência do spin e isospin das partículas na equação de movimento da função de distribuição (equações (3.58) e (3.59)).

Em pesquisas futuras, podemos calcular os coeficientes de transporte da equação de Vlasov (equações (3.58) e (3.59)), onde utilizamos a função de Wigner. Estes coeficientes, como por exemplo o tensor de condutividade elétrica, vão carregar informação quântica proveniente da função de Wigner. Cálculos deste tipo são efetuados pela em [43] e [21] para um gás de elétrons não relativístico e relativístico respectivamente. Nós podemos efetuar cálculos análogos, ou seja, utilizando os mesmos métodos matemáticos para a matéria estelar.

APÊNDICE A – EQUAÇÃO DE DIRAC

A.1 Equação para os Nêutrons

A equação de movimento para um nêutron na aproximação \mathcal{L}_{0M} é dada pela equação (2.37):

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - (m_n - g_s \sigma_0)] \psi_{(n)}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.1})$$

Podemos reescrever esta equação em função das matrizes $\vec{\alpha}$ e β :

$$[i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - g_v \omega^0 - \beta m_n^*] \psi_{(n)}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Agora vamos utilizar o *ansatz*:

$$\psi^{(\varepsilon)}(\vec{r}, t) = N f(E, \vec{\Pi}) e^{i\varepsilon \vec{\Pi} \cdot \vec{r}} e^{-i\varepsilon E t} \quad , \quad (\text{A.3})$$

onde E é um número real positivo e o rótulo ε identifica soluções com energia positiva (+) e negativa (-). Substituindo o *ansatz* na equação (A.2) obtemos:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon E - g_v \omega^0 - m_{(n)}^* & -\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \\ -\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{P} i & \varepsilon E - g_v \omega^0 + m_{(n)}^* \end{bmatrix} f(E, \vec{\Pi}) = 0 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Agora, definindo :

$$E^* = E - g_v \omega^0 \quad , \quad f(E, \vec{\Pi}) = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.5})$$

podemos reescrever a equação (A.4) como:

$$\begin{bmatrix} E^* - m_{(n)}^* & -\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \\ -\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & E^* + m_{(n)}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = 0 \quad . \quad (\text{A.6})$$

Para obtermos soluções não triviais devemos impor que o determinante da equação acima seja nulo. Esta imposição implica em:

$$E^* = \varepsilon \sqrt{\Pi^2 + m_{(n)}^{*2}} \Rightarrow \varepsilon E = g_v \omega^0 + \varepsilon \sqrt{\Pi^2 + m_{(n)}^{*2}} \quad . \quad (\text{A.7})$$

A equação matricial (A.6) implica na seguinte relação entre u_a e u_b :

$$u_a = \frac{\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}}{E^* - m_{(n)}^*} u_b \quad , \quad u_b = \frac{\varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}}{E^* + m_{(n)}^*} u_a \quad . \quad (\text{A.8})$$

Escolhendo $u_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e explicitando as matrizes de Pauli, podemos escrever o espinor $\psi_n^{(\varepsilon), s=+1}$ como:

$$\psi^{(\varepsilon)}(\vec{r}, t) = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon \Pi_z}{E^* + m_{(n)}^*} \\ \frac{\varepsilon (\Pi_x + i \Pi_y)}{E^* + m_{(n)}^*} \end{bmatrix} e^{i\varepsilon \vec{\Pi} \cdot \vec{r}} e^{-i\varepsilon E t} . \quad (\text{A.9})$$

Escolhendo $u_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, podemos escrever o espinor $\psi_{(n)}^{(\varepsilon), s=-1}$ como:

$$\psi_{(n)}^{(\varepsilon)}(\vec{r}, t) = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-\varepsilon \Pi_z}{E^* + m_{(n)}^*} \\ \frac{\varepsilon (\Pi_x - i \Pi_y)}{E^* + m_{(n)}^*} \end{bmatrix} e^{i\varepsilon \vec{\Pi} \cdot \vec{r}} e^{-i\varepsilon E t} . \quad (\text{A.10})$$

Agora, podemos calcular a constante N , para termos satisfeita a normalização:

$$\int d^3r \psi_{\Pi}^{(\varepsilon)}(\vec{r}, t)^\dagger \psi_{\Pi'}^{(\varepsilon')}(\vec{r}, t) = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(\vec{\Pi} - \vec{\Pi}') , \quad (\text{A.11})$$

obtendo:

$$N = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{E^* + m_{(n)}^*}{2E^*} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{A.12})$$

A.2 Equação para os Prótons

Nesta seção resolvemos a equação (2.38) usando os mesmos procedimentos adotados na referência[44]. A equação de movimento para um próton na aproximação \mathcal{L}_{0M} é dada pela equação (2.38):

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v \gamma_0 \omega^0 - e \gamma_\mu A^\mu] \psi_{(p)}(x) = 0 \quad , \quad (\text{A.13})$$

onde $A^\mu = (0, 0, B_0 x, 0)$. Escrever esta equação em função das matrizes $\vec{\alpha}$ e β , temos:

$$[i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - g_v \omega^0 + e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \beta m_{(p)}^*] \psi_{(p)}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.14})$$

Agora vamos utilizar o *ansatz*:

$$\psi^\varepsilon(x) = N h^{(\varepsilon)}(x) e^{i\varepsilon \Pi_y y + i\varepsilon \Pi_z z} e^{-i\varepsilon E t} \quad , \quad (\text{A.15})$$

onde E é número real positivo, $\varepsilon = +(-)$ corresponde aos estados de energia positiva(negativa) e $h^{(\varepsilon)}$ representa um espinor de Dirac que determinaremos substituindo $\psi_{(p)}^\varepsilon$ na equação (A.14). Realizando esta substituição ficamos com:

$$\begin{bmatrix} (E^* - m_{(p)}^*) \mathbf{1}_2 & i\sigma_1 \partial_x - \varepsilon \sigma_2 \Pi_y - \varepsilon \sigma_3 \Pi_z + e \sigma_2 B_0 x \\ i\sigma_1 \partial_x - \varepsilon \sigma_2 \Pi_y - \varepsilon \sigma_3 \Pi_z + e \sigma_2 B_0 x & (E^* + m_{(p)}^*) \mathbf{1}_2 \end{bmatrix} h^{(\varepsilon)} = 0 \quad . \quad (\text{A.16})$$

Usando as representações das matrizes de Pauli convencionadas neste trabalho, obtemos a seguinte identidade:

$$i\sigma_1\partial_x - \varepsilon\sigma_2\Pi_y - \varepsilon\sigma_3\Pi_z + e\sigma_2B_0x =$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon\Pi_z & i\partial_x + i\varepsilon\Pi_y - ieB_0x \\ i\partial_x - i\varepsilon\Pi_y + ieB_0x & -\varepsilon\Pi_z \end{bmatrix} . \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a última relação na equação (A.16) obtemos:

$$\begin{bmatrix} -E^* + m_{(p)}^* & 0 & \varepsilon\Pi_z & \hat{O}_1 \\ 0 & -E^* + m_{(p)}^* & \hat{O}_2 & -\varepsilon\Pi_z \\ \varepsilon\Pi_z & \hat{O}_1 & -E^* - m_{(p)}^* & 0 \\ \hat{O}_2 & -\varepsilon\Pi_z & 0 & -E^* - m_{(p)}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = 0 , \quad (\text{A.18})$$

onde definimos:

$$\hat{O}_1 = -i(\partial_x + \varepsilon\Pi_y - eB_0x) \quad , \quad \hat{O}_2 = -i(-\partial_x - \varepsilon\Pi_y + eB_0x) \quad . \quad (\text{A.19})$$

Por conveniência vamos definir a variável:

$$\xi = (eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{\varepsilon\Pi_y}{eB_0} \right) , \quad (\text{A.20})$$

e com esta obtemos:

$$\hat{O}_1 = -i(eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(-\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) , \quad \hat{O}_2 = -i(eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) . \quad (\text{A.21})$$

Para obtermos $h^{(\varepsilon)}$ vamos usar as propriedades das funções de onda do oscilador harmônico unidimensional:

$$\begin{aligned} \left(-\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v_n(\xi) &= -\sqrt{2(n+1)} v_{n+1}(\xi) \\ \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v_n(\xi) &= \sqrt{(2n)} v_{n-1}(\xi) \\ v_n(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Observando as propriedades acima, construímos o seguinte *ansatz*:

$$h^{(\varepsilon)}(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \\ h_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_2^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_3^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_4^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \end{bmatrix} . \quad (\text{A.23})$$

Substituindo este *ansatz* na equação (A.18) obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$\begin{bmatrix} -E^* + m_{(p)}^* & 0 & \varepsilon \Pi_z & i\sqrt{2neB_0} \\ 0 & -E^* + m_{(p)}^* & -i\sqrt{2neB_0} & -\varepsilon \Pi_z \\ \varepsilon \Pi_z & i\sqrt{2neB_0} & -E^* - m_{(p)}^* & 0 \\ -i\sqrt{2neB_0} & -\varepsilon \Pi_z & 0 & -E^* - m_{(p)}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{bmatrix} = 0 . \quad (\text{A.24})$$

Para obtermos soluções não triviais a matriz deve ter determinante nulo. Esta condição implica na seguinte relação:

$$E^* = \varepsilon \sqrt{\Pi_z^2 + m_{(p)}^{*2} + 2neB_0} \Rightarrow \varepsilon E = g_v \omega^0 + \varepsilon \sqrt{\Pi_z^2 + m_{(p)}^{*2} + 2neB_0} . \quad (\text{A.25})$$

Analisando a equação (A.24), pode-se mostrar que os coeficientes $C_i^{(\varepsilon)}$, $i = 1 - 4$, satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} C_3^{(\varepsilon)} &= \frac{1}{E^* + m_{(p)}^*} \left(\varepsilon \Pi_z C_1^{(\varepsilon)} + i\sqrt{2neB_0} C_2^{(\varepsilon)} \right) \\ C_4^{(\varepsilon)} &= -\frac{1}{E^* + m_{(p)}^*} \left(i\sqrt{2neB_0} C_1^{(\varepsilon)} + \varepsilon \Pi_z C_2^{(\varepsilon)} \right) , \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

que podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon \Pi_z}{E^* + m_{(p)}^*} \\ -\frac{i\sqrt{2neB_0}}{E^* + m_{(p)}^*} \end{bmatrix} C_1^{(\varepsilon)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i\sqrt{2neB_0}}{E^* + m_{(p)}^*} \\ -\frac{\varepsilon \Pi_z}{E^* + m_{(p)}^*} \end{bmatrix} C_2^{(\varepsilon)} . \quad (\text{A.27})$$

Os estados de energia positiva dependem de duas constantes independentes e, portanto, são duplamente degenerados. Já o estado fundamental não é degenerado, pois, devido a equação (A.23) devemos ter um único estado em $n=0$ (quando $n=0$ os coeficientes $C_2^{(\varepsilon)}$ e $C_4^{(\varepsilon)}$ se anulam). A degenerescência pode ser associada a um rótulo de spin:

$$n = l + \frac{1}{2}(-s + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad s = \pm 1, \quad (\text{A.28})$$

onde:

$$h_{s=+1}^{(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\xi) \\ 0 \\ \varepsilon \Pi_z v_l(\xi) \\ -i\sqrt{2leB_0}v_{l-1}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* + m_{(p)}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$h_{s=-1}^{(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} 0 \\ (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\xi) \\ i\sqrt{2(l+1)eB_0}v_{l+1}(\xi) \\ -\varepsilon \Pi_z v_l(\xi) \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E^* + m_{(p)}^* \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

A normalização dos estados fica:

$$\psi_{\lambda}^{(\varepsilon)} = N h_s^{(\varepsilon)}(\xi) e^{i\varepsilon \Pi_y y + i\varepsilon \Pi_z z} e^{-i\varepsilon E t} \quad (\text{A.31})$$

$$\int d^3r \psi_{\lambda'}^{(\varepsilon')}(\vec{r}, t)^\dagger \psi_{\lambda}^{(\varepsilon)}(\vec{r}, t) = \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{\varepsilon \varepsilon'} = \delta_{l' l} \delta_{s' s} \delta_{\varepsilon' \varepsilon} \delta(\Pi'_y - \Pi_y) \delta(\Pi'_z - \Pi_z) \quad , \quad (\text{A.32})$$

onde λ' e λ representam conjuntos completos (l, s, Π_y, Π_z) de números quânticos que especificam os estados univocamente. Usando as seguintes relações:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\varepsilon(p' - p)x} = \delta(p' - p) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi v_{n'}(\xi) v_n(\xi) = \delta_{n' n} \quad , \quad (\text{A.33})$$

obtemos:

$$\delta_{\lambda' \lambda} \delta_{\varepsilon \varepsilon'} = \frac{N^2}{(eB_0)^{\frac{1}{2}}} 2E^*(E^* + m_p^*) \delta_{l' l} \delta_{s' s} (2\pi)^2 \delta(\Pi'_y - \Pi_y) \delta(\Pi'_z - \Pi_z) \quad . \quad (\text{A.34})$$

Então, para satisfazer a equação (A.34), devemos ter:

$$N = (eB_0)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\pi} \left(2E^*(E^* + m_{(p)}^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{A.35})$$

APÊNDICE B – TROCAS DE VARIÁVEIS E ALGUMAS RELAÇÕES ÚTEIS

B.1 Cálculo do Jacobiano $\frac{\partial(x^\mu, \Pi_{(p)}^\mu)}{\partial(x^\mu, p^\mu)}$

Vamos calcular o Jacobianos da transformação de variáveis $d^4x d^4\Pi_{(p)} \rightarrow d^4x d^4p$:

$$d\Pi^0 (d^4x d^3\Pi_{(p)}) = d\Pi^0 (J d^4x d^3p) = dp^0 (J d^4x d^3p) \quad (\text{B.1})$$

pois $\frac{\partial\Pi^0}{\partial p^0} = 1$ e $\Pi_{(p)}^\mu = p^\mu + g_\nu \omega^\mu(x) + eA^\mu(x)$ com $A^\mu(x)$ e $\omega^\mu(x)$ sendo funções somente do espaço-tempo. J é o jacobiano da transformação, ou seja, é um determinante funcional de sétima ordem definido por:

$$J = \frac{\partial(x^\mu, \Pi_{(p)}^1, \Pi_{(p)}^2, \Pi_{(p)}^3)}{\partial(x^\mu, p^1, p^2, p^3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{x^0}\Pi^1 & \partial_{x^1}\Pi^1 & \partial_{x^2}\Pi^1 & \partial_{x^3}\Pi^1 & 1 & 0 & 0 \\ \partial_{x^0}\Pi^2 & \partial_{x^1}\Pi^2 & \partial_{x^2}\Pi^2 & \partial_{x^3}\Pi^2 & 0 & 1 & 0 \\ \partial_{x^0}\Pi^3 & \partial_{x^1}\Pi^3 & \partial_{x^2}\Pi^3 & \partial_{x^3}\Pi^3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{B.2})$$

B.2 Derivadas

Quando estamos fazendo a mudança de variável $(x, \Pi) \rightarrow (x, p)$, podemos escrever uma regra da cadeia para os quadrivetores:

$$\frac{\partial}{\partial \Pi^\mu} = \frac{\partial p^\nu}{\partial \Pi^\mu} \partial_\mu^p = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} = \frac{\partial}{\partial p^\mu} , \quad (\text{B.3})$$

onde $\Pi^\nu = p^\nu + g_\nu \omega^\nu + eA^\nu$. Para a derivada em relação às coordenadas temos:

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \mathcal{F}(x, \Pi(x))|_{\Pi=const} &= d_x^\mu \mathcal{F}(x, p(x)) = \partial_x^\mu \mathcal{F}(x, p)|_{p=const.} + \\ &+ \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial p_\nu} \mathcal{F}(x, p) \\ &= \partial_x^\mu \mathcal{F}(x, p) - g_\nu (\partial_x^\mu \omega_\nu) \partial_p^\nu \mathcal{F}(x, p) + \\ &- e (\partial_x^\mu A_\nu) \partial_p^\nu \mathcal{F}(x, p) \\ &= \partial_x^\mu \mathcal{F}(x, p) - g_\nu (\partial_x^\mu \omega^\nu) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p) + \\ &- e (\partial_x^\mu A^\nu) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.3 Cálculo do Comutador (3.41)

Vamos calcular o comutador dado pela equação (3.41):

$$[\partial_\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , p^\mu] \psi , \quad (\text{B.5})$$

utilizando as seguintes condições:

$$\partial_\mu \omega^\mu = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{B.7})$$

$$(\text{B.8})$$

As seguintes condições acima implicam em $[\partial_\mu, p^\mu] = 0$, onde $p^\mu = \Pi^\mu + g_v \omega^\mu + eA^\mu$, pois:

$$\partial_\mu p^\mu = \partial_\mu \Pi^\mu + g_v \partial_\mu \omega^\mu + e \partial_\mu A^\mu = 0 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Trocando o momento cinético pelo canônico $p^\mu = \Pi^\mu - g_v \omega^\mu - eA^\mu$ e usando o resultado acima temos:

$$\begin{aligned} & [\partial_\mu + \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , p^\mu] \psi = \\ &= [\partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , p^\mu] \psi \\ &= [\partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , \Pi^\mu - g_v \omega^\mu - eA^\mu] \psi \\ &= \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\Pi^\mu \psi) - \Pi^\mu \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \psi + \\ &- \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (g_v \omega^\mu + eA^\mu) \psi + \\ &+ (g_v \omega^\mu + eA^\mu) \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \psi \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde o primeiro termo pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \partial_v^\Pi \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\Pi^\mu \psi) = \\ &= \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\partial_v^\Pi \Pi^\mu) \psi + \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \Pi^\mu (\partial_v^\Pi \psi) \\ &= \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \delta_{\mu v} \psi + \Pi^\mu \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\partial_v^\Pi \psi) \\ &= \partial_x^\mu (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \psi + \Pi^\mu \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\partial_v^\Pi \psi) = \\ &= \Pi^\mu \partial_x^v (g_v \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (\partial_v^\Pi \psi) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

O terceiro termo pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & -\partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (g_\nu \omega^\mu + eA^\mu) \psi = \\
 = & -\partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) (g_\nu \omega^\mu + eA^\mu) \partial_\nu^\Pi \psi = \\
 = & -(g_\nu \omega^\mu + eA^\mu) \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \partial_\nu^\Pi \psi = \\
 = & -(g_\nu \omega^\mu + eA^\mu) \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) \psi .
 \end{aligned}
 \tag{B.12}$$

Então o primeiro termo cancela o segundo e o terceiro cancela o quarto, portanto o comutador é nulo:

$$[\partial_\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (g_\nu \omega_\mu(x) + eA_\mu(x)) , p^\mu] = 0
 \tag{B.13}$$

APÊNDICE C – DECOMPOSIÇÃO ESPINORIAL DA MATRIZ DE WIGNER

Neste apêndice fazemos uma decomposição da matriz de Wigner F similar a decomposição feita na referência [24]. De um modo geral, qualquer matriz 4×4 pode ser expandida em uma base de 16 matrizes. Conforme demonstrado na referência [45], uma base completa para as matrizes $\bar{\Psi} \otimes \Psi$ consiste no conjunto das seguintes 16 matrizes:

$$\Gamma^i = \left\{ \mathbf{1}_4, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5 \right\}, \quad (\text{C.1})$$

onde o conjunto $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ formam uma base para a álgebra de Clifford associado ao quadri-espço de Minkowski. O conjunto de matrizes Γ^i gozam das seguintes propriedades:

$$\text{Sp} [\Gamma^i] = 0 \quad , \quad \text{exceto para } \Gamma^i = \mathbf{1}_4 \quad (\text{C.2})$$

$$(\Gamma^i)^2 = \pm \mathbf{1}_4 \quad . \quad (\text{C.3})$$

Então podemos reescrever a matriz F como uma combinação linear das matrizes Γ^i da seguinte maneira [46],[24]:

$$F = \mathcal{F} + \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu + i\gamma^5 \mathcal{Q} + \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{C.4})$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[F] \\
\mathcal{Q} &\equiv -\frac{1}{4} i \text{Sp}[\gamma^5 F] \\
\mathcal{V}_\mu &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[\gamma_\mu F] \\
\mathcal{A}_\mu &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[\gamma^5 \gamma_\mu F] \\
\mathcal{J}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{4} \text{Sp}[\sigma_{\mu\nu} F] \quad .
\end{aligned}
\tag{C.5}$$

Estes vetores de base são reais e quando submetidos a uma transformação de Lorentz se comportam como um escalar, pseudoescalar, vetor, vetor axial e tensor antisimétrico respectivamente.

Agora, utilizando a equação de movimento linearizada (3.29), vamos eliminar os vetores de base \mathcal{Q} , \mathcal{V}_μ , $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ reescrevendo-os em função de \mathcal{F} e \mathcal{A}_μ . Reescrevendo a equação (3.29), temos:

$$(\gamma_\mu K^\mu - m^*) F = 0 \quad , \tag{C.6}$$

onde $K^\mu \equiv p^\mu + \frac{1}{2} \hbar \nabla^\mu \equiv p^\mu + \frac{1}{2} i \hbar [\partial^\mu - \partial_\nu^\Pi \partial_x^\nu (\frac{g_s}{4} \sigma(x) \gamma^\mu - g_\nu \omega^\mu - e A^\mu)]$. Usando as propriedades (C.2) e (C.3), podemos decompor a equação (C.6) similarmente à equação (C.4), resultando no conjunto de equações acopladas:

$$\begin{aligned}
K^\mu \mathcal{V}_\mu - m^* \mathcal{F} &= 0 \\
i K^\mu \mathcal{A}_\mu + m^* \mathcal{P} &= 0 \\
K_\mu \mathcal{F} - i K^\nu \mathcal{J}_{\mu\nu} - m^* \mathcal{V}_\mu &= 0 \\
i K_\mu \mathcal{Q} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} K^\nu \mathcal{J}^{\lambda\eta} - m^* \mathcal{A}_\mu &= 0 \\
i(K_\mu \mathcal{V}_\nu - K_\nu \mathcal{V}_\mu) - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} K^\lambda \mathcal{A}^\eta - m^* \mathcal{J}_{\mu\nu} &= 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{C.7}$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta}$ é um o tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico. Os vetores em (C.5) são reais, mas K^μ é imaginário. Então explicitando K^μ , as partes imaginária e real das equações acima devem ser satisfeitas separadamente. A parte real do conjunto acima implica em:

$$p^\mu \mathcal{V}_\mu = m^* \mathcal{F} \quad (\text{C.8})$$

$$\hbar \nabla^\mu \mathcal{A}_\mu = 2m^* \mathcal{Q} \quad (\text{C.9})$$

$$p_\mu \mathcal{F} + \frac{1}{2} \hbar \nabla^\nu \mathcal{J}_{\mu\nu} = m^* \mathcal{V}_\mu \quad (\text{C.10})$$

$$-\hbar \nabla_\mu \mathcal{Q} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} p^\nu \mathcal{J}^{\lambda\eta} = 2m^* \mathcal{A}_\mu \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{1}{2} \hbar (\nabla_\mu \mathcal{V}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{V}_\mu) + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} p^\lambda \mathcal{A}^\eta = m^* \mathcal{J}_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{C.12})$$

e a parte imaginária implica em:

$$\hbar \nabla^\mu \mathcal{V}_\mu = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$p^\mu \mathcal{A}_\mu = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{1}{2} \hbar \nabla_\mu \mathcal{F} = p^\nu \mathcal{J}_{\mu\nu} \quad (\text{C.15})$$

$$p_\mu \mathcal{Q} = -\frac{1}{4} \hbar \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} \nabla^\nu \mathcal{J}^{\lambda\eta} \quad (\text{C.16})$$

$$p_\mu \mathcal{V}_\nu - p_\nu \mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2} \hbar \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} \nabla^\lambda \mathcal{A}^\eta \quad . \quad (\text{C.17})$$

Resolvendo para \mathcal{Q} , \mathcal{V}_μ e $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ as equações (C.9), (C.10) e (C.12) em termos de \mathcal{A}_μ e \mathcal{F} ficamos com:

$$\mathcal{Q} = \frac{\hbar}{2m^*} \nabla_\mu A^\mu \quad (\text{C.18})$$

$$\mathcal{V}_\mu = \frac{p_\mu}{m^*} \mathcal{F} + \frac{1}{2m^{*2}} \hbar \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} \nabla^\nu p^\lambda \mathcal{A}^\eta \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \frac{1}{m^*} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} p^\lambda \mathcal{A}^\eta + \frac{1}{2m^{*2}} \hbar (\nabla_\mu p_\nu - \nabla_\nu p_\mu) \mathcal{F} \quad . \quad (\text{C.20})$$

A equação (C.19) é semelhante a decomposição de Gordon da quadricorrente [28], ou seja, separá-la em uma parte convectiva e outra correspondente a contribuição do spin:

$$j^\mu = \frac{i}{2m} \left\{ \underbrace{\bar{\psi} \partial^\mu \psi}_{conv.} - \underbrace{\partial_\mu [\bar{\psi} \sigma^{\mu\lambda} \psi]}_{spin} \right\} . \quad (C.21)$$

A equação (C.20) pode ser interpretada como um termo correspondendo ao acoplamento clássico entre o tensor de spin e uma quadricorrente axial acrescido de uma correção quântica de primeira ordem em \hbar .

Para que as equações (C.20) e (C.19) possam ser interpretados desta maneira é preciso estabelecer a conexão entre a quadricorrente axial \mathcal{A}_μ e o spin. Na próxima seção estabeleceremos esta conexão utilizando o limite clássico $\hbar \rightarrow 0$.

C.1 Interpretação Física no Limite Clássico

Levando o limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ nas equações (C.18), (C.19) e (C.20) ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= 0 \\ \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu &= \frac{1}{m^*} \gamma^\mu p_\mu \mathcal{F} \\ \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2m^*} \sigma^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha \mathcal{A}^\beta \\ &= \frac{-i}{m^*} \gamma_5 \sigma_{\alpha\beta} p^\alpha \mathcal{A}^\beta \\ &= \frac{1}{m^*} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\alpha \mathcal{A}^\beta . \end{aligned} \quad (C.22)$$

Na última linha fizemos uso da equação (C.14) e usamos as seguintes propriedades das matrizes de Dirac:

$$\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} , \quad (C.23)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} . \quad (C.24)$$

Fazendo uso das equações (C.22), a matriz (C.4) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{F} + \frac{1}{m^*} \gamma^\mu p_\mu \mathcal{F} + \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{m^*} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\alpha \mathcal{A}^\beta \\ &= \frac{1}{m^*} (m^* + \gamma_\mu p^\mu) (\mathcal{F} - \gamma_5 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu) . \end{aligned} \quad (C.25)$$

Vamos reescrever a matriz F em termos dos operadores de projeção de spin:

$$P(\pm s) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu) , \quad (C.26)$$

onde[45] $P(+s)(P(-s))$ projeta um estado arbitrário no estado com autovalor $+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$. s_μ é um quadrivetor do tipo espaço unitário e ortogonal a p^μ , ou seja, satisfaz a seguinte condição:

$$s_\mu s^\mu = -1 . \quad (C.27)$$

Agora, reescrevendo o segundo fator na equação (C.25) em termos de $P(s)$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} - \gamma_5 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu) &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu) (\mathcal{F} + s^\mu \mathcal{A}_\mu) + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu) (\mathcal{F} - s^\mu \mathcal{A}_\mu) \\
&= P(+s) \mathcal{N}_+ + P(-s) \mathcal{N}_- \quad , \quad (C.28)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{N}_+(\mathcal{N}_-)$ é a densidade de spin $+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$ no espaço de fase e é dada por:

$$\mathcal{N}_\pm = \mathcal{F} \pm s^\mu \mathcal{A}_\mu \quad . \quad (C.29)$$

Isolando \mathcal{F} e \mathcal{A}_μ na última equação, ficamos com:

$$\mathcal{F} = \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_- \quad , \quad (C.30)$$

$$\mathcal{A}_\mu = -s_\mu (\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-) \quad . \quad (C.31)$$

Observando as última duas equações fica evidente a conexão de \mathcal{F} e \mathcal{A}_μ com o spin. Assim para um sistema de spin saturado no limite clássico, as densidades \mathcal{N}_+ e \mathcal{N}_- se igualam e \mathcal{A}_μ se anula. Conseqüentemente a parte tensorial $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ se anula e a matriz de Wigner equação (C.4) pode ser reescrita como:

$$F = \mathcal{F} + \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu \quad . \quad (C.32)$$

APÊNDICE D – CÁLCULO DA FUNÇÃO DE WIGNER NO EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO

D.1 Função de Wigner para os Nêutrons

Nesta seção calculamos a seguinte função:

$$f_{(n)}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int dp^0 \text{Sp} [\gamma^0 F_{(n)}(x, p)] \quad , \quad (\text{D.1})$$

onde $F_{(n)}(x, p)$ é dado pela equação (3.13) e os espinores de Dirac são dados pela equações (2.47) e (2.48). No equilíbrio termodinâmico a equação acima fica:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(\vec{p})_{(eq.)} &= \int dp^0 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \times \\ &\quad \times \text{Sp} \left[\gamma^0 <: \hat{\Psi}_{(n)}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \hat{\Psi}_{(n)}(x - \frac{1}{2}R) :>_{(eq.)} \right] \\ &= \int dp^0 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i(p^\mu + g_\nu \omega^\mu)R_\mu} \times \\ &\quad \times <: \hat{\Psi}_{(n)}(x + \frac{1}{2}R) \gamma^0 \hat{\Psi}_{(n)}(x - \frac{1}{2}R) :>_{(eq.)} \\ &= \int dp^0 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i(p^\mu + g_\nu \omega^\mu)R_\mu} \times \\ &\quad \times <: \hat{\Psi}_{(n)}^\dagger(x + \frac{1}{2}R) \hat{\Psi}_{(n)}(x - \frac{1}{2}R) :>_{(eq.)} \\ &= \int dp^0 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i(p^\mu + g_\nu \omega^\mu)R_\mu} \times \\ &\quad \times \sum_\alpha n_\alpha \psi_{(n)\alpha}^{\dagger+}(x + \frac{1}{2}R) \psi_{(n)\alpha}^+(x - \frac{1}{2}R) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde fizemos uso da equação (2.44) e n_α é o peso estatístico de Fermi-Dirac:

$$n_{\alpha} = \left[1 + e^{\beta(E_{\alpha} - E_F)} \right]^{-1} , \quad (D.3)$$

e o somatório corre sobre os seguintes valores:

$$\sum_{\alpha} = \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\Pi . \quad (D.4)$$

Usando os espinores de Dirac (2.47) e (2.48) e usando o peso dado pela equação (D.3), a equação (D.2) fica:

$$f_{(n)}(\vec{p})_{(eq.)} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int dp_0 \frac{\delta(E^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E(p) - E_F)}} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{\beta(E(p) - E_F)}} . \quad (D.5)$$

Se introduzirmos γ^0 entre os espinores de Dirac na equação (D.2) e o fator $\frac{1}{4}$, de acordo com a definição (3.33) obtemos a função $\mathcal{F}_{(n)}$:

$$\mathcal{F}_{(n)}(p) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{m_{(n)}^*}{E^*} \frac{\delta(E^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E(p) - E_F)}} . \quad (D.6)$$

D.2 Função de Wigner para os Prótons

Nesta seção Calculamos a seguinte função:

$$f_{(p)}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int dp^0 \text{Sp} [\gamma^0 F_{(p)}(x, p)] , \quad (D.7)$$

onde $F_{(p)}(x, p)$ é dado pela equação (3.12) e os espinores de Dirac são dados pela equação (2.50). No equilíbrio termodinâmico a equação acima fica:

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} = \int d^4p^0 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \psi_{(p)\alpha}^{\dagger+}(x + \frac{1}{2}R) \psi_{(p)\alpha}^+(x - \frac{1}{2}R) \quad (D.8)$$

e o somatório em α corre sobre os seguintes valores:

$$\sum_{\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Pi_y d\Pi_z \quad . \quad (D.9)$$

Vamos introduzir as seguintes variáveis auxiliares:

$$\zeta^- \equiv (eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}R_x - \frac{\Pi_y}{eB_0} \right) \quad , \quad \zeta^+ \equiv (eB_0)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}R_x - \frac{\Pi_y}{eB_0} \right) \quad . \quad (D.10)$$

Em termos destas variáveis os espinores de Dirac ficam:

$$\begin{aligned} \psi_{(p)}^{\dagger+}(x + \frac{1}{2}R) &= N h_s^{\dagger}(\zeta^+) e^{-i\Pi_y(y + \frac{1}{2}R_y) - i\Pi_z(z + \frac{1}{2}R_z)} e^{iE(t + R_0)} \\ \psi_{(p)}^+(x - \frac{1}{2}R) &= N h_s^{\dagger}(\zeta^-) e^{i\Pi_y(y - \frac{1}{2}R_y) + i\Pi_z(z - \frac{1}{2}R_z)} e^{-iE(t - R_0)} \quad . \end{aligned} \quad (D.11)$$

Omitindo o índice (p) , o produto do espinor acima e seu adjunto fica:

$$\psi^{\dagger+}(x + \frac{1}{2}R) \psi^+(x - \frac{1}{2}R) = N^2 h_s^{\dagger}(\zeta^+) h_s(\zeta^-) e^{-i\Pi_y R_y} e^{-i\Pi_z R_z} e^{iE R_0} \quad . \quad (D.12)$$

Agora, vamos trocar o momento canônico clássico pelo cinético no expoente da função de Wigner (D.8) e rearranjar os termos da seguinte maneira:

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} = \int dp^0 \sum_{\alpha} \left[1 + e^{\beta(E_{\alpha} - E_F)} \right]^{-1} \frac{1}{(2\pi)^4} \times \\ \times \int d^4 R e^{-i(p_{\mu} + g_{\nu} \omega^{\mu} + eA^{\mu})R_{\mu}} \psi_{\alpha}^{\dagger+} \left(x + \frac{1}{2}R \right) \psi_{\alpha}^{+} \left(x - \frac{1}{2}R \right) . \quad (D.13)$$

Utilizando os valores estabelecidos na aproximação \mathcal{L}_{HM} , o expoente da equação anterior fica:

$$e^{-i(p^{\mu} + g_{\nu} \omega^{\mu} + eA^{\mu})R_{\mu}} = e^{-i(p_0 R_0 + g_{\nu} \omega^0 R_0 - (p_y + eB_0 x)R_y - p_x R_x - p_z R_z)} , \quad (D.14)$$

Então, temos o seguinte resultado para o produto da equação (D.12) com a equação anterior:

$$e^{-i(p^{\mu} + g_{\nu} \omega^{\mu} + eA^{\mu})R_{\mu}} \psi^{\dagger+} \left(x + \frac{1}{2}R \right) \psi^{+} \left(x - \frac{1}{2}R \right) = \\ = N^2 h_s^{\dagger}(\zeta^{+}) h_s(\zeta^{-}) e^{iR_0(E - g_{\nu} \omega^0 - p_0)} e^{iR_z(p_z - \Pi_z)} e^{iR_x p_x} e^{iR_y(p_y + eB_0 x - \Pi_y)} . \quad (D.15)$$

Integrando a equação anterior em $dR_0 dR_y dR_z$ e usando a propriedade (A.33) da função delta de Dirac, obtemos:

$$(2\pi)^3 \delta(E^{*} - p_0) \delta(p_z - \Pi_z) \delta(p_y + eB_0 x - \Pi_y) e^{iR_x p_x} , \quad (D.16)$$

onde $\delta(E^* - p_0) = \delta(\sqrt{p_z^2 + m_{(p)}^{*2} + 2enB_0} - p_0)$ é a condição de camada de massa (3.47). Usando o resultado (D.11) e integrando sobre $d\Pi_y d\Pi_z dp_0$, a equação (D.13) pode ser reescrita como:

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} = \frac{N^2}{(2\pi)^3} \sum_{l,s} \left\{ \left[1 + e^{\beta(E_{l,s} - E_F)} \right]^{-1} \int dR_x e^{ip_x R_x} h_s^\dagger(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) h_s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \right\}, \quad (\text{D.17})$$

onde usamos as variáveis auxiliares $\mathbf{b}_1 = -\frac{p_y}{(eB_0)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{e}$ e $\mathbf{a} = \frac{(eB_0)^{\frac{1}{2}}}{2} R_x$. Vamos calcular agora o produto $h_s^\dagger(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) h_s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a})$ usando a equação (2.54). O termo de $s = 1$ fica :

$$\begin{aligned} h_{s=1}^\dagger(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) h_{s=1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) &= \\ &= \begin{bmatrix} (E^* + m_{(p)}^*) v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \\ 0 \\ \Pi_z v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \\ -i\sqrt{2leB_0} v_{l-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} (E^* + m_{(p)}^*) v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ 0 \\ \Pi_z v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ -i\sqrt{2leB_0} v_{l-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \end{bmatrix} \\ &= (E^* + m_{(p)}^*)^2 v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + \Pi_z^2 v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + \\ &+ 2leB_0 v_{l-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_{l-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ &= ((E_0^* + m_{(p)}^*)^2 + \Pi_z^2) v_0(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_0(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + \\ &+ ((E^* + m_{(p)}^*)^2 + \Pi_z^2) (v_{l+1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_{l+1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ &+ 2(0eB_0) v_0(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_0(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + 2(l+1)eB_0 v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

O termo de $s = -1$ fica:

$$\begin{aligned}
 h_{s=-1}^\dagger(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})h_{s=-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) &= \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \\ i\sqrt{2(l+1)}eB_0v_{l+1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \\ -\Pi_z v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ (E^* + m_{(p)}^*)v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ i\sqrt{2(l+1)}eB_0v_{l+1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\ -\Pi_z v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \end{bmatrix} \\
 &= (E^* + m_{(p)}^*)^2 v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + \Pi_z^2 v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + \\
 &+ 2(l+1)eB_0v_{l+1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_{l+1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \quad .
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Somando a (D.18) com (D.19) e multiplicando pelo fator de normalização (A.35), temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=\pm 1} h_s^\dagger(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})h_s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) &= v_0(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_0(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) + v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \\
 &+ v_{l+1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_{l+1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \quad .
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Vamos integrar o segundo termo da equação anterior em dR_x :

$$\begin{aligned}
 \int dR_x e^{ip_x R_x} v_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})v_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) &= \\
 &= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^l l!} \int d\mathbf{a} e^{2i\mathbf{b}_2 \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a})^2]} H_l(\mathbf{b}_1 + \mathbf{a})H_l(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

onde usamos a variável auxiliar $\mathbf{b}_2 = \frac{p_x}{(eB_0)^{\frac{1}{2}}}$. Agora usando a seguinte identidade [43]:

$$\int da e^{2ib_2a} e^{-\frac{1}{2}[(b_1+a)^2+(b_1-a)^2]} H_l(b_1+a) H_l(b_1-a) =$$

$$= (-1)^l 2^l l! (\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-(b_1^2+b_2^2)} L_l(2(b_1^2+b_2^2)) \quad , \quad (D.22)$$

onde $L_l(x) = e^x \frac{d^l}{dx^l} (x^l e^{-x})$ é o polinômio de Laguerre de ordem l , a equação (D.21) resulta em:

$$2(-1)^l e^{-(b_1^2+b_2^2)} L_l(2(b_1^2+b_2^2)) \quad . \quad (D.23)$$

Integrando sobre em dR_x os outros dois termos restantes na equação (D.20) e levando resultado na equação (D.17), ficamos com:

$$f_{(p)}(\vec{p})_{(eq.)} =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \left[\frac{L_0(2b_3^2)}{1 + e^{\beta(E_0-E_F)}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1 + e^{\beta(E_{l+1}-E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \right] \quad , \quad (D.24)$$

onde fizemos $b_3^2 = \frac{1}{eB_0} (p_x^2 + p_y^2)$.

Calculamos a função $\mathcal{F}_{(p)}$ dado pela equação (3.33) inserindo a matriz γ^0 entre os espinores de Dirac nas equações (D.18) e (D.19), acrescentando o fator $\frac{1}{4}$ e não executando a integral em dp_0 . Fazendo este procedimento chegamos em resultado similar ao encontrado por [27]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{(p)}(p)_{(eq.)} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \frac{\delta(E_0^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_0 - E_F)}} \frac{m_{(p)}^*}{E_0^*} L_0(2b_3^2) + \\
 + \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_{(p)}^*}{E_{l+1}^*} \frac{(-1)^l \delta(E_{l+1}^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_{l+1} - E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{D.25}$$

APÊNDICE E – CÁLCULO DA DENSIDADE DE ENERGIA E DA PRESSÃO

Neste capítulo calculamos de forma detalhada a densidade de energia dada pela equação (3.76) e pressão dada pela equação (3.77). Conforme a subseção 3.3.2, a equação (3.76) tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon = T_{00} = & \frac{4}{m_{(p)}^*} \int d^4 p \, p_0 p_0 \mathcal{F}_{(p)}(x, p) + \frac{4}{m_{(n)}^*} \int d^4 p \, p_0 p_0 \mathcal{F}_{(n)}(x, p) \\ & + \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) , \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde, no equilíbrio termodinâmico, as funções de Wigner são dadas por:

$$\mathcal{F}_{(n)}(p)_{(eq.)} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{m_{(n)}^*}{2E_{(n)}^*} \frac{\delta(E_{(n)}^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_{(n)}(p) - E_F)}} , \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(p)}(p)_{(eq.)} = & \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \frac{\delta(E_0^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_0 - E_F)}} \frac{m^*}{E_0^*} L_0(2b_3^2) + \\ & + \frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m^*}{E_{l+1}^*} \frac{(-1)^l \delta(E_{l+1}^* - p_0)}{1 + e^{\beta(E_{l+1} - E_F)}} (L_l(2b_3^2) - L_{l+1}(2b_3^2)) . \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Fazendo uso da identidade $\int dx \, x e^{-x^2} L_n(2x^2) = \frac{(-1)^n}{2}$, a primeira integral na equação (E.1) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB_0}} \times \\
& \times \left[E_{0(p)}^* n_0 L_0 \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l E_{l+1(p)}^* n_{l+1} \left(L_l \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) - L_{l+1} \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) \right) \right] \\
& = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB_0}} \times \\
& \times \left[E_{0(p)}^* n_0 L_0 \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l E_{l+1(p)}^* n_{l+1} \left(L_l \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) - L_{l+1} \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) \right) \right] \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \left[E_{0(p)}^* n_0 \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l E_{l+1(p)}^* n_{l+1} \left(\frac{(-1)^l}{2} - \frac{(-1)^{l+1}}{2} \right) \right] \\
& = \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l E_{l(p)}^* n_{l(p)} \quad ,
\end{aligned} \tag{E.4}$$

onde $n_l = \frac{1}{1+e^{\beta(E_{l(p)}-E_F)}}$ e $g_l = \begin{cases} 1 & \text{se } l = 0 \\ 2 & \text{se } l > 0 \end{cases}$. Para a segunda integral na equação (E.1) temos:

$$4 \int d^4p p_0 p_0 \mathcal{F}_{(n)}(x, p) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p E_{(n)}^* n_{(n)}(p) \quad . \tag{E.5}$$

Levando as duas integrais na equação (E.1), ficamos com:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l E_{l(p)}^* n_{l(p)} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p E_{(n)}^* n_{(n)}(p) \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) \quad .
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Agora, vamos calcular a pressão dada pela equação (3.77):

$$\begin{aligned}
 P &= T_{zz} = T_{xx} + P_M = \frac{4}{m_{(p)}^*} \int d^4 p \, p_z p_z \mathcal{F}_{(p)}(p)_{eq.} + \\
 &+ \frac{4}{m_{(n)}^*} \int d^4 p \, p_z p_z \mathcal{F}_{(n)}(p)_{eq.} + \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Fazendo uso da identidade $\int dx \, x e^{-x^2} L_n(2x^2) = \frac{(-1)^n}{2}$, a primeira integral na equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} p_{\parallel}^2 \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{F}_{(p)}(p)_{eq.} \\
 &= \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} p_{\parallel}^2 \left[\frac{n_0}{E_{0(p)}^*} \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{n_{l+1(p)}}{E_{l+1(p)}^*} \left(\frac{(-1)^l}{2} - \frac{(-1)^{l+1}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{E_{l(p)}^*} n_{l(p)} .
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

A segunda integral na equação (E.7), pode ser simplificada resultando em:

$$4 \int d^4 p \, p_{\parallel}^2 \mathcal{F}_{(n)}(x, p) = \frac{2}{3(2\pi)^3} \int d^3 p \, \frac{p^2}{E_{(n)}^*} n_{(n)}(p) . \tag{E.9}$$

Levando a equação (E.8) e a (E.9) na (E.7), a pressão pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{E_{l(p)}^*} n_{l(p)} + \frac{2}{3(2\pi)^3} \int d^3 p \, \frac{p^2}{E_{(n)}^*} n_{(n)}(p) \\
 &+ \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Podemos calcular também a densidade bariônica do sistema em equilíbrio, resolvendo a seguinte integral:

$$\rho_B = \rho_{(p)} + \rho_{(n)} = \int d^3p f_{eq.(p)}(\vec{p}) + \int d^3p f_{eq.(n)}(\vec{p}) \quad . \quad (E.11)$$

Usando a equação (D.24) e procedendo de maneira similar à empregada nos cálculos da densidade de energia e pressão efetuados acima, a primeira integral na equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \rho_{(p)} &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-\frac{p_{\parallel}^2}{eB_0}} \times \\ &\times \left[n_{0(p)} L_0 \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l n_{l+1(p)} \left(L_l \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) - L_{l+1} \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-\frac{p_{\parallel}^2}{eB_0}} \times \\ &\times \left[n_{0(p)} L_0 \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l n_{l+1(p)} \left(L_l \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) - L_{l+1} \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{eB_0} \right) \right) \right] \\ &= \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \left[n_{0(p)} \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l n_{l+1(p)} \left(\frac{(-1)^l}{2} - \frac{(-1)^{l+1}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l n_{l(p)} \quad . \end{aligned} \quad (E.12)$$

A segunda integral na equação (E.11) pode ser reescrita como:

$$\rho_{(n)} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p n_{(n)}(p) \quad . \quad (E.13)$$

Levando a equação (E.12) e a (E.13) na (E.11), a densidade bariônica pode ser reescrita como:

$$\rho_B = \rho_{(p)} + \rho_{(n)} = \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l n_{l(p)} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p n_{(n)}(p) \quad . \quad (\text{E.14})$$

Podemos calcular também a densidade escalar do sistema em equilíbrio, resolvendo a seguinte integral:

$$\rho_s = \rho_{s(p)} + \rho_{s(n)} = 4 \int d^4p \mathcal{F}_{eq.(p)}(p) + 4 \int d^4p \mathcal{F}_{eq.(n)}(p) \quad . \quad (\text{E.15})$$

Procedendo de maneira análoga ao cálculo da pressão, chegamos em:

$$\rho_s = \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{m_{(p)}^*}{E_{l(p)}^*} n_{l(p)} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m_{(n)}^*}{E_{(n)}^*} n_{(n)}(p) \quad (\text{E.16})$$

E.1 Sistema à Temperatura Zero

Se o sistema estiver na temperatura zero, as equações para densidade de energia, pressão e densidade bariônica podem ser simplificadas e integradas analiticamente. Efetuando o limite $T \rightarrow 0$ na equação (E.6), o primeiro termos fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l E_{l(p)}^* \frac{1}{1 + e^{\beta(E_l - E_F)}} \right] = \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l E_{l(p)}^* \theta(E_l - E_F) \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_0^{p_{\parallel F}} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{N_F} g_l \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^{*2} + 2leB_0} \\
& = \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l (m^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} + \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] , \\
& \hspace{25em} (E.17)
\end{aligned}$$

onde usamos $X_l = \frac{p_{\parallel F}}{\sqrt{m^{*2} + 2leB_0}}$. O segundo termo da equação (E.6), fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p E_{(n)}^* n_{(n)}(p) \right] = \frac{1}{(\pi)^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \sqrt{p^2 + m^{*2}} \theta(E - E_F) \\
& = \frac{1}{(\pi)^2} \int_0^{p_F} dp p^2 \sqrt{p^2 + m^{*2}} = \frac{m^{*4}}{(\pi)^2} \left[\frac{p_F}{4m^*} Y^3 - \frac{p_F}{8m^*} Y - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m^*} + Y \right) \right] , \\
& \hspace{25em} (E.18)
\end{aligned}$$

onde $Y = \sqrt{\frac{p_F^2}{m^{*2}} + 1}$. Então, somando a (E.17) e a (E.18), a equação (E.6) na temperatura zero pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon & = \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l (m^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} + \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] + \\
& + \frac{m^{*4}}{(\pi)^2} \left[\frac{p_F}{4m^*} Y^3 - \frac{p_F}{8m^*} Y - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m^*} + Y \right) \right] + \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) . \\
& \hspace{25em} (E.19)
\end{aligned}$$

Tomando o limite $T \rightarrow 0$, o primeiro termo da equação para a pressão (E.10) fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{E_{l(p)}^*} n_{(p)} \right] = \\
& = \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + m^{*2} + 2leB_0}} \theta(E_l - E_F) \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_0^{p_{\parallel F}} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{N_F} g_l \frac{p_{\parallel}^2}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + m^{*2} + 2leB_0}} \\
& = \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l (m^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} - \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{E.20}$$

O segundo termo da equação (E.10), fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{2}{3(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}} \frac{1}{1 + e^{\beta(E - E_F)}} \right] = \\
& = \frac{8\pi}{3(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}} \theta(E - E_F) \\
& = \frac{8\pi}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}} = \\
& = \frac{m^{*4}}{24(\pi)^2} \left[\frac{2p_F}{m^*} Y^3 - \frac{5p_F}{m^*} Y + \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m^*} + Y \right) \right] .
\end{aligned} \tag{E.21}$$

Levando o resultado (E.20) e (E.21) na equação (E.10), a pressão fica :

$$\begin{aligned}
P = & \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{N_F} g_l (m^{*2} + 2leB_0) \left[X_l \sqrt{X_l^2 + 1} - \ln \left(X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right) \right] + \\
& + \frac{m^{*4}}{24(\pi)^2} \left[\frac{2p_F}{m^*} Y^3 - \frac{5p_F}{m^*} Y + \frac{1}{8} \ln \left(\frac{p_F}{m^*} + Y \right) \right] + \\
& + \left(\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) .
\end{aligned} \tag{E.22}$$

Para a densidade bariônica à temperatura zero, temos :

$$\rho_B = \rho_{(p)} + \rho_{(n)} = \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l p_{\parallel F}(N_F) + \frac{1}{3\pi^2} p_F^3 . \tag{E.23}$$

Para a densidade escalar, primeiro vamos calcular o primeiro termo da equação (E.16):

$$\begin{aligned}
& \frac{eB_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{m_{(p)}^*}{E_{l(p)}^*} \theta(E_{l(p)} - E_F) = \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dp_{\parallel} \sum_{l=0}^{\infty} g_l \frac{m_{(p)}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + m_{(p)}^{*2} + 2leB_0}} \\
& = \frac{2eB_0}{(2\pi)^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l m_{(p)}^* \ln \left[X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right] .
\end{aligned} \tag{E.24}$$

O segundo termo na equação (E.16) resulta em:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m_{(n)}^*}{\sqrt{p^2 + m_{(n)}^{*2}}} \theta(E_{(n)} - E_F) = \frac{1}{(\pi)^2} \int_0^{p_F} dp m_{(n)}^* \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_{(n)}^{*2}}} \\
& = \frac{1}{2\pi^2} m_{(n)}^{*2} \left[\frac{p_F}{m_{(n)}^*} Y - \ln \left(\frac{p_F}{m_{(n)}^*} + Y \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Os dois últimos resultados implicam na (E.16) à temperatura zero:

$$\rho_s = \frac{eB_0}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l m_{(p)}^* \ln \left[X_l + \sqrt{X_l^2 + 1} \right] + \frac{1}{2\pi^2} m_{(n)}^{*2} \left[\frac{p_F}{m_{(n)}^*} Y - \ln \left(\frac{p_F}{m_{(n)}^*} + Y \right) \right] . \quad (\text{E.26})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. D. Bjorken e S. D. Drell , *Relativistic Quantum Mechanics* , MacGraw-Hill-New York , (1964)
- [2] C. Thompson e R. C. Duncan , *The Astrophysical Journal* **392**, L9 (1992)
- [3] A. Burrows e J. M. Lattimer , *The Astrophysical Journal* **307**, pg.178 , agosto de (1986)
- [4] C. Kouveliotou , S. Dieters , T. Strohmayer , J. Von Paradijs, G. J. Fishman , C. A. Meegan , K. Hurley , J. Kommers , I. Smith , D. Frail e T. Murakami , *Nature* **393**, pg.235 , maio (1998)
- [5] A. Broderick , M. Prakash e J. M. Lattimer , *The Astrophysical Journal* **537** , 351-367 , (2000)
- [6] I. B. Bernstein , *Physical Review* **109**, 10 , (1958)
- [7] R. Hofstadter e H.R. Fechter , J.A. McIntyre , *Physical Review* **92**, 978 (1953)
- [8] A. E. S. Green , *Physical Review* **95**, 1006 (1954)
- [9] K. C. Chung , C.S. Wang e A.J. Santiago , *Physical Review C* **59**, 714 (1999)
- [10] H. Yukawa , *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935)
- [11] J. D. Walecka , *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics* , Imperial College Press , 2ª edição (2004) , pg. 549
- [12] J. D. Walecka e B. D. Serot , *Int. J. Mod. Phys. E* **6**, 515 (1997)
- [13] W. Greiner e J. Reinhardt , *Field Quantization* , Springer-Verlag , pg.59 , (1996)

- [14] B. D. Serot e J. D. Walecka , *Advances in Nuclear Physics* **16** , vol. 16 , New York Plenum Press , (1968)
- [15] M. Born , *Science* **122**, 675 (1955)
- [16] E. P. Wigner , *Physical Review* **40**, 749-759 (1932)
- [17] R. F. O'Connell , E. P. Wigner , *Physical Letters* **83**, (1981)
- [18] R. L. Liboff , *Kinetic Theory : Classical , Quantum and Relativistic Descriptions* , Springer-Verlag , 3ª edição , pg. 78 , (2003)
- [19] S. S. Avancini e G. Safanelli , *Solução Numérica para a Equação de Vlasov* , Relatório final de Iniciação Científica , Anais de Iniciação Científica UFSC 2006 , pg. 5 , (2006)
- [20] W. F. G. Swann , *Physical Review* **44**, 224 (1933)
- [21] R. D. Tenreiro e R. Hakim , *Physical Review D* **15** , N6 , 1435 , (1977)
- [22] S. R. Groot , W. A. van Leeuwen e Ch. G. van Weert , *Relativistic Kinetic Theory : Principles and Applications* , North-Holland Publishing Company , pg.115 , pg.104 , (1980)
- [23] B. Blättel , V. Koch e U. Mosel , *Reports on Progress in Physics* **56** , 1-62 , (1993)
- [24] D. Vasak , M. Gyulassy e H.-TH. Elze , *Annals of Physics* **173** , 462-492 , (1987)
- [25] H. Goldstein , C. Poole e J. Safko , *Classical Mechanics* , Addison Wesley , 3ª edição , pg.323
- [26] F. Mandl e G. Shaw , *Quantum Field Theory* , John Wiley e Sons , pg.67 , (1986)

- [27] R. D. Tenreiro e R. Hakim , *Journal of Physics A* **9** , vol. 10 , 1525 , (1977)
- [28] E. Merzbacher , *Quantum Mechanics* , John Wiley and Sons , 2^a edição , pg. 603 , (1970)
- [29] D. Vasak , M. Gyulassy , H.-TH. Elze , H. Heinz , H. Stöcker e W. Greiner , *Modern Physics Letters A* **7** , Vol. 2 , 451-460 , (1987)
- [30] R. K. Pathria , *Statistical Mechanics* , Butterworth-Heinemann , 2^a edição , pg. 127 , (1996)
- [31] K. Huang , *Statistical Mechanics* , John Wiley and Sons , 2^a edição , pg. 247 , (1987)
- [32] W. P. Schleich , *Quantum Optics in Phase Space* , Wiley-vch Verlag GmbH , 1^a edição , (2001)
- [33] Ch. Kurtsiefer e T. Pfau e J. Mlynek , *Nature* **386** , pg. 150 , 13 de Março (1997)
- [34] J. D. Bjorken e S. D. Drell , *Relativistic Quantum Fields* , MacGraw-Hill-New York , pg. 17 (1965)
- [35] M. J. de Oliveira , *Termodinâmica* , Livraria da Física , pg. 53 , (2005)
- [36] F. F. Chen , *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* , Springer-Verlag , 2^a edição , vol. 1 , pg. 203 , (1974)
- [37] T. J. M. Boyd e J. J. Sanderson , *The Physics of Plasmas* , Cambridge University Press , pg. 82 , (2003)
- [38] J. H. Malmberg e C. B. Wharton , *Physical Review Letters* **17**, 175 , (1966)
- [39] R. J. Armstrong , *Physical Letters* **85A**, 281 , (1981)

- [40] L.D. Landau e E.M. Lifshitz , *The Classical Theory of Fields* , Butterworth-Heinemann , pg. 92
- [41] M. Abramowitz e I. A. Stegun , *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical tables.* , McGraw-Hill , 1ª edição , pg. 361 , (1960)
- [42] G. E. Andrews , R. Askey e R. Roy , *Special Functions* , Cambridge University Press , 1ª edição , pg. 61 , (1999)
- [43] D. C. Kelly , *Physical Review* **134** , N3A , A641 , (1964)
- [44] S. S. Avancini , Notas sobre Magnetares no contexto do modelo Nambu-Jona-Lasinio , (2008)
- [45] C. Itzykson e J.B. Zuber , *Quantum Field Theory* , McGraw-Hill New York , (1980)
- [46] J. Snygg , *Clifford Algebra : A Computational Tool for Physicists* , Oxford University Press , pg. 57 , (1997)